UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 4^o appello - 18.06.2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, con il prodotto scalare euclideo, sono dati i sistemi $A = [(1,1,0,0),(0,1,1,0),(1,0,-1,0)]$ e $B = [(k,2,1,k),(0,2,1,k)]$. Si determinino:

- $dim\mathcal{L}(A)$, $dim\mathcal{L}(B)$ e $dim(\mathcal{L}(A)+\mathcal{L}(B))$;

  Risposta $dim\mathcal{L}(A) = 2$, $dim\mathcal{L}(B) = \begin{cases} 2 & k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$, $dim(\mathcal{L}(A)+\mathcal{L}(B)) = \begin{cases} 4 & k \neq 0 \\ 3 & k = 0 \end{cases}$ ______ **(pt.4)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $\mathcal{L}(A)+\mathcal{L}(B)$ è diretta;

  Risposta la somma è diretta per ogni $k \in \mathbb{R}$ ______ **(pt.1)**

- il complemento ortogonale di A e un complemento diretto di $\mathcal{L}(A)$ diverso dal complemento ortogonale.

  Risposta $A^\perp = \{(a,-a,a,b) \in \mathbb{R}^4, a,b \in \mathbb{R}\}$; $W = \{(c,0,0,d) \in \mathbb{R}^4, c,d \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Si determinino, se possibile, una matrice diagonale D simile ad A e una relativa diagonalizzante P.

Risposta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, al variare di $k \in \mathbb{R}$, si discuta la compatibilità del sistema : $\begin{cases} kx + kz = -1 \\ x + ky = 0 \\ x - 2y + kz = 0 \end{cases}$ e, quando è possibile, lo si risolva.

Risposta Il sistema è compatibile per $k \neq -1, 0, 2$: $S_k = \left\{ \left(\frac{-k}{(k-2)(k+1)}, \frac{1}{(k-2)(k+1)}, \frac{(2+k)}{k(k-2)(k+1)} \right) \right\}$ ______ **(pt.5)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ è data la conica generale $\mathcal{C} : x^2 - 2y^2 - xy + 2x + 2 = 0$. Si determinino rappresentazioni cartesiane

- dei punti impropri e del fascio dei diametri di $\mathcal{C}$;

  Risposta $P_\infty = [(2,1,0)]$, $Q_\infty = [(-1,1,0)]$, $\lambda(2x - y + 2) + \mu(x + 4y) = 0$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ______ **(pt.2)**

- della tangente a $\mathcal{C}$ in $P = (0,1)$.

  Risposta $x - 4y + 4 = 0$ ______ **(pt.1)**

Si dica, motivando la risposta, se la retta $r : x + 4y = 0$ risulta essere un asse.

Risposta La retta assegnata è la polare di Y_∞, dunque, pur essendo un diametro, non è un asse poiché non risulta ortogonale al proprio polo. ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $E_3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, sono date le rette $r : x + y - 1 = 0 = z - 2$ ed $s : 2y - z = 0 = x$. Si determinino rappresentazioni cartesiane:

- del piano α, se esiste, che contiene r ed s;

  Risposta $2x + 2y - z = 0$ ______ **(pt.2)**

- della retta t passante per $P = (1,1,1)$ ed ortogonale a r e s.

  Risposta $x - y = 0 = x + 2z - 3$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 - 3xy + 2y^2 - 2z = 0$ e se ne determinino gli eventuali punti doppi. Si scriva una rappresentazione cartesiana della conica impropria di $\mathcal{Q}$ e, nel caso essa sia riducibile, delle sue componenti. Si riconosca la quadrica.

Risposta Si tratta di una quadrica generale. $\mathcal{C}_\infty : (x_1 - x_2)(x_1 - 2x_2) = x_4 = 0$ è una conica riducibile nell'unione delle rette $r_\infty : x_1 - x_2 = x_4 = 0$ ed $s_\infty : x_1 - 2x_2 = x_4 = 0$. Dunque $\mathcal{Q}$ è un paraboloide iperbolico. ______ **(pt.3)**

Si dica, motivando la risposta, se i piani $\alpha : z = 0$ e $\beta : x = 0$ risultano tangenti alla quadrica e, in tal caso, si determini il punto di tangenza.

Risposta Dato che $\mathcal{Q}$ è una quadrica generale e $\mathcal{Q} \cap \alpha$ è riducibile, α è tangente a $\mathcal{Q}$; $O = (0,0,0)$, punto doppio della conica $\mathcal{Q} \cap \alpha$, è il punto di tangenza. Essendo, al contrario, $\mathcal{Q} \cap \beta$ irriducibile, β non è tangente a $\mathcal{Q}$. ______ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 4^o appello - 18.06.2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, con il prodotto scalare euclideo, sono dati i sistemi $A = [(2,2,0,0),(1,0,-1,0)]$ e $B = [(1,1,0,0),(k,2,1,k),(0,2,1,k)]$. Si determinino:

- $dim\mathcal{L}(A)$, $dim\mathcal{L}(B)$ e $dim(\mathcal{L}(A)+\mathcal{L}(B))$;

  Risposta $dim\mathcal{L}(A) = 2$, $dim\mathcal{L}(B) = \begin{cases} 3 & k \neq 0 \\ 2 & k = 0 \end{cases}$, $dim(\mathcal{L}(A)+\mathcal{L}(B)) = \begin{cases} 4 & k \neq 0 \\ 3 & k = 0 \end{cases}$ ________ **(pt.4)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $\mathcal{L}(A)+\mathcal{L}(B)$ è diretta;

  Risposta non esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la somma sia diretta. ________ **(pt.1)**

- il complemento ortogonale di A e un complemento diretto di $\mathcal{L}(A)$ diverso dal complemento ortogonale.

  Risposta $A^\perp = \{(a,-a,a,b) \in \mathbb{R}^4, a,b \in \mathbb{R}\}$; $W = \{(c,0,0,d) \in \mathbb{R}^4, c,d \in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si determinino, se possibile, una matrice diagonale D simile ad A e una relativa diagonalizzante P.

Risposta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, al variare di $k \in \mathbb{R}$, si discuta la compatibilità del sistema : $\begin{cases} kx + ky = 1 \\ x + kz = 0 \\ 4x - ky - 3z = 0 \end{cases}$ e, quando è possibile, lo si risolva.

Risposta Il sistema è compatibile per $k \neq -3, -1, 0$: $S_k = \left\{ \left(\frac{k}{(k+3)(k+1)}, \frac{3+4k}{k(k+3)(k+1)}, \frac{-1}{(k+3)(k+1)} \right) \right\}$ ________ **(pt.5)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ è data la conica generale $\mathcal{C} : x^2+y^2+2xy+2x+2 = 0$. Si determinino rappresentazioni cartesiane

- dei punti impropri e del fascio dei diametri di $\mathcal{C}$;

  Risposta $P_\infty = [(1,-1,0)]$ con molteplicità 2, $x + y = k,\ k \in \mathbb{R}$ ________ **(pt.2)**

- della tangente a $\mathcal{C}$ in $P = (-1,1)$.

  Risposta $x + 1 = 0$ ________ **(pt.1)**

Si dica, motivando la risposta, se la retta $r : x + y = 0$ risulta essere un asse.

Risposta La retta assegnata è la polare di Y_∞, dunque, pur essendo un diametro, non è un asse poiché non risulta ortogonale al proprio polo. ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $E_3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, sono date le rette $r : x-z-1 = 0 = x+y$ ed $s : y+2z-1 = 0 = z-2$. Si determinino rappresentazioni cartesiane:

- del piano α, se esiste, che contiene r ed s;

  Risposta $y + z + 1 = 0$ ________ **(pt.2)**

- della retta t passante per $P = (1,1,1)$ ed ortogonale a r e s.

  Risposta $x - 1 = 0 = y - z$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 + 2y^2 - 2z = 0$ e se ne determinino gli eventuali punti doppi. Si scriva una rappresentazione cartesiana della conica impropria di $\mathcal{Q}$ e, nel caso essa sia riducibile, delle sue componenti. Si riconosca la quadrica.

Risposta Si tratta di una quadrica generale. $\mathcal{C}_\infty : (x_1 - \sqrt{2}ix_2)(x_1 + \sqrt{2}ix_2) = x_4 = 0$ è una conica riducibile nell'unione delle rette $r_\infty : x_1 - \sqrt{2}ix_2 = x_4 = 0$ ed $s_\infty : x_1 + \sqrt{2}ix_2 = x_4 = 0$. Dunque $\mathcal{Q}$ è un paraboloide ellittico. ________ **(pt.3)**

Si dica, motivando la risposta, se i piani $\alpha : z = 0$ e $\beta : x = 0$ risultano tangenti alla quadrica e, in tal caso, si determini il punto di tangenza.

Risposta Dato che $\mathcal{Q}$ è una quadrica generale e $\mathcal{Q} \cap \alpha$ è riducibile, α è tangente a $\mathcal{Q}$; $O = (0,0,0)$, punto doppio della conica $\mathcal{Q} \cap \alpha$, è il punto di tangenza. Essendo, al contrario, $\mathcal{Q} \cap \beta$ irriducibile, β non è tangente a $\mathcal{Q}$. ________ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 4^o appello - 18.06.2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, con il prodotto scalare euclideo, sono dati i sistemi $A = [(1,1,0,0),(1,0,-1,0)]$ e $B = [(k,2,1,k),(0,1,1,0),(0,2,1,k)]$. Si determinino:

- $dim\mathcal{L}(A)$, $dim\mathcal{L}(B)$ e $dim(\mathcal{L}(A)+\mathcal{L}(B))$;

  Risposta $dim\mathcal{L}(A) = 2$, $\quad dim\mathcal{L}(B) = \begin{cases} 3 & k \neq 0 \\ 2 & k = 0 \end{cases}$, $\quad dim(\mathcal{L}(A)+\mathcal{L}(B)) = \begin{cases} 4 & k \neq 0 \\ 3 & k = 0 \end{cases}$ ______ **(pt.4)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $\mathcal{L}(A)+\mathcal{L}(B)$ è diretta;

  Risposta non esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la somma sia diretta ______ **(pt.1)**

- il complemento ortogonale di A e un complemento diretto di $\mathcal{L}(A)$ diverso dal complemento ortogonale.

  Risposta $A^\perp = \{(a,-a,a,b) \in \mathbb{R}^4, a,b \in \mathbb{R}\}$; $\quad W = \{(c,0,0,d) \in \mathbb{R}^4, c,d \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Si determinino, se possibile, una matrice diagonale D simile ad A e una relativa diagonalizzante P.

Risposta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, al variare di $k \in \mathbb{R}$, si discuta la compatibilità del sistema : $\begin{cases} kx + z = 0 \\ 2x + ky + 3z = 0 \\ ky + kz = 1 \end{cases}$ e, quando è possibile, lo si risolva.

Risposta Il sistema è compatibile per $k \neq 0,1,2$: $S_k = \left\{ \left(\frac{-1}{(k-2)(k-1)}, \frac{2-3k}{k(k-2)(k-1)}, \frac{k}{(k-2)(k-1)} \right) \right\}$ ______ **(pt.5)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ è data la conica generale $\mathcal{C} : x^2 - 2y^2 + xy - 2x = 0$. Si determinino rappresentazioni cartesiane

- dei punti impropri e del fascio dei diametri di $\mathcal{C}$;

  Risposta $P_\infty = [(2,-1,0)]$, $Q_\infty = [(1,1,0)]$, $\quad \lambda(2x+y-2)+\mu(x-4y)=0$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ______ **(pt.2)**

- della tangente a $\mathcal{C}$ in $P = (2,0)$.

  Risposta $x + y - 2 = 0$ ______ **(pt.1)**

Si dica, motivando la risposta, se la retta $r : x - 4y = 0$ risulta essere un asse.

Risposta La retta assegnata è la polare di Y_∞, dunque, pur essendo un diametro, non è un asse poiché non risulta ortogonale al proprio polo. ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $E_3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, sono date le rette $r : 2x + y - 1 = 0 = x - 2$ ed $s : x - z + 1 = 0 = y + z$. Si determinino rappresentazioni cartesiane:

- del piano α, se esiste, che contiene r ed s;

  Risposta $x + y + 1 = 0$ ______ **(pt.2)**

- della retta t passante per $P = (1,1,1)$ ed ortogonale a r e s.

  Risposta $x - y = 0 = z - 1$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q} : y^2 - z^2 - 2x = 0$ e se ne determinino gli eventuali punti doppi. Si scriva una rappresentazione cartesiana della conica impropria di $\mathcal{Q}$ e, nel caso essa sia riducibile, delle sue componenti. Si riconosca la quadrica.

Risposta Si tratta di una quadrica generale. $\mathcal{C}_\infty : (x_2 - x_3)(x_2 + x_3) = x_4 = 0$ è una conica riducibile nell'unione delle rette $r_\infty : x_2 - x_3 = x_4 = 0$ ed $s_\infty : x_2 + x_3 = x_4 = 0$. Dunque $\mathcal{Q}$ è un paraboloide iperbolico. ______ **(pt.3)**

Si dica, motivando la risposta, se i piani $\alpha : x = 0$ e $\beta : z = 0$ risultano tangenti alla quadrica e, in tal caso, si determini il punto di tangenza.

Risposta Dato che $\mathcal{Q}$ è una quadrica generale e $\mathcal{Q} \cap \alpha$ è riducibile, α è tangente a $\mathcal{Q}$; $O = (0,0,0)$, punto doppio della conica $\mathcal{Q} \cap \alpha$, è il punto di tangenza. Essendo, al contrario, $\mathcal{Q} \cap \beta$ irriducibile, β non è tangente a $\mathcal{Q}$. ______ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 4^o appello - 18.06.2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, con il prodotto scalare euclideo, sono dati i sistemi $A = [(2,1,-1,0),(0,1,1,0),(1,1,0,0)]$ e $B = [(k,0,0,k),(k,2,1,k)]$. Si determinino:

- $dim\mathcal{L}(A)$, $dim\mathcal{L}(B)$ e $dim(\mathcal{L}(A)+\mathcal{L}(B))$;

  Risposta $dim\mathcal{L}(A) = 2$, $dim\mathcal{L}(B) = \begin{cases} 2 & k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$, $dim(\mathcal{L}(A)+\mathcal{L}(B)) = \begin{cases} 4 & k \neq 0 \\ 3 & k = 0 \end{cases}$ **(pt.4)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $\mathcal{L}(A)+\mathcal{L}(B)$ è diretta;

  Risposta la somma è diretta per ogni $k \in \mathbb{R}$ **(pt.1)**

- il complemento ortogonale di A e un complemento diretto di $\mathcal{L}(A)$ diverso dal complemento ortogonale.

  Risposta $A^\perp = \{(a,-a,a,b) \in \mathbb{R}^4, a,b \in \mathbb{R}\}$; $W = \{(c,0,0,d) \in \mathbb{R}^4, c,d \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{6} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Si determinino, se possibile, una matrice diagonale D simile ad A e una relativa diagonalizzante P.

Risposta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, al variare di $k \in \mathbb{R}$, si discuta la compatibilità del sistema : $\begin{cases} 2x+3y-kz = 0 \\ kx+kz = 1 \\ x+ky = 0 \end{cases}$ e, quando è possibile, lo si risolva.

Risposta Il sistema è compatibile per $k \neq -3, 0, 1$: $S_k = \left\{ \left(\frac{k}{(k+3)(k-1)}, \frac{-1}{(k+3)(k-1)}, \frac{2k-3}{k(k+3)(k-1)} \right) \right\}$ **(pt.5)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ è data la conica generale $\mathcal{C} : x^2+4y^2-4xy+2x+1 = 0$. Si determinino rappresentazioni cartesiane

- dei punti impropri e del fascio dei diametri di $\mathcal{C}$;

  Risposta $P_\infty = [(2,1,0)]$ con molteplicità 2, $x-2y = k$, $k \in \mathbb{R}$ **(pt.2)**

- della tangente a $\mathcal{C}$ in $P = (-1,0)$.

  Risposta $y = 0$ **(pt.1)**

Si dica, motivando la risposta, se la retta $r : x-2y = 0$ risulta essere un asse.

Risposta La retta assegnata è la polare di Y_∞, dunque, pur essendo un diametro, non è un asse poiché non risulta ortogonale al proprio polo. **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $E_3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, sono date le rette $r : x+z-1 = 0 = y-2$ ed $s : y-2z = 0 = x$. Si determinino rappresentazioni cartesiane:

- del piano α, se esiste, che contiene r ed s;

  Risposta $2x-y+2z = 0$ **(pt.2)**

- della retta t passante per $P = (1,1,1)$ ed ortogonale a r e s.

  Risposta $x-z = 0 = 2y+z-3$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q} : x^2+xy-2y^2-z = 0$ e se ne determinino gli eventuali punti doppi. Si scriva una rappresentazione cartesiana della conica impropria di $\mathcal{Q}$ e, nel caso essa sia riducibile, delle sue componenti. Si riconosca la quadrica.

Risposta Si tratta di una quadrica generale. $\mathcal{C}_\infty : (x_1-x_2)(x_1+2x_2) = x_4 = 0$ è una conica riducibile nell'unione delle rette $r_\infty : x_1-x_2 = x_4 = 0$ ed $s_\infty : x_1+2x_2 = x_4 = 0$. Dunque $\mathcal{Q}$ è un paraboloide iperbolico. **(pt.3)**

Si dica, motivando la risposta, se i piani $\alpha : z = 0$ e $\beta : x = 0$ risultano tangenti alla quadrica e, in tal caso, si determini il punto di tangenza.

Risposta Dato che $\mathcal{Q}$ è una quadrica generale e $\mathcal{Q} \cap \alpha$ è riducibile, α è tangente a $\mathcal{Q}$; $O = (0,0,0)$, punto doppio della conica $\mathcal{Q} \cap \alpha$, è il punto di tangenza. Essendo, al contrario, $\mathcal{Q} \cap \beta$ irriducibile, β non è tangente a $\mathcal{Q}$. **(pt.3)**