UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - IV appello - 26.06.12

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k-1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & k-1 & 1 & k-1 \\ k+1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = {}^t(x, y, z, t)$ e $B_k = \begin{pmatrix} k-1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale.

- Si discuta al variare di $k \in \mathbb{R}$ la risolubilità del sistema lineare $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni;
  Risposta Se $k = -1, 2$ compatibile con ∞^2 soluzioni, se $k \neq -1, 2$ compatibile con ∞^1 soluzioni **(pt.4)**
- posto $k = 2$ si determini l'insieme S delle soluzioni del sistema;
  Risposta $S = \{(\alpha, \beta, \alpha - 1, 1 - 3\alpha - \beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**
- si determinino una base della copertura lineare $\mathcal{L}(S)$ e la sua dimensione;
  Risposta $B_{\mathcal{L}(S)} = ((1, 0, 1, -3), (0, 1, 0, -1), (0, 0, -1, 1))$, $\dim \mathcal{L}(S) = 3$ **(pt.2)**
- si determini il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(S)$ rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4$.
  Risposta $\mathcal{L}((2, 1, 1, 1))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & k & 1 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k risulta diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq 0, 2$ **(pt.3)**
- posto $k = 1$ di determinino, se possibile, una matrice diagonale D simile ad A_1 e la relativa matrice diagonalizzante P.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ sono dati le rette $r : x+y-1 = 0 = z$ ed $s : x = 0 = 2x+y-z-2$ ed il punto $P = (1, 0, 1)$. Si determinino rappresentazioni cartesiane:

- della retta passante per P e incidente sia r che s;
  Risposta $x + y - 1 = 0 = 3x + y - z - 2$ **(pt.2)**
- dei piani paralleli a $\pi : x + y + 1 = 0$ che distano 2 da P.
  Risposta $x + y - 1 \pm 2\sqrt{2} = 0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{R})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k : kx^2 + y^2 - 2xy + 2y = 0$, dove $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $\mathcal{C}_k$ è un'iperbole equilatera e, in questo caso, le coordinate dei suoi punti impropri.
Risposta $k = -1$, $[(1, 1 \pm \sqrt{2}, 0)]$ **(pt.2)**

- Posto $k = 1$ si riconosca $\mathcal{C}_1$ e si determinino, se esistono e sono reali, centro, asintoti, assi e vertici.
  Risposta Parabola, $C = [(1, 1, 0)]$, $a :\ 2x - 2y - 1 = 0$, $V = (3/8, -1/8)$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\tilde{E}_3(\mathbb{R})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 + y^2 - 2z^2 - 2x - 2y - 4z - 2 = 0$, precisando la natura dei punti semplici.
Risposta Iperboloide iperbolico **(pt.3)**

Dati i piani $\alpha : y = 0$ e $\beta : z = 0$ si riconoscano le sezioni piane $\mathcal{C}_\alpha = \mathcal{Q} \cap \alpha$ e $\mathcal{C}_\beta = \mathcal{Q} \cap \beta$.
Risposta $\mathcal{C}_\alpha$: iperbole, $\mathcal{C}_\beta$: circonferenza **(pt.2)**

2

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - IV appello - 26.06.12

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k-2 & -2 & 0 & k \\ k-2 & k-4 & 1 & 2 \\ 1 & 1-k & 0 & k \end{pmatrix}$, $X = {}^t(x, y, z, t)$ e $B_k = \begin{pmatrix} k-2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale.

- Si discuta al variare di $k \in \mathbb{R}$ la risolubilità del sistema lineare $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni;
  Risposta Se $k = 0, 3$ compatibile con ∞^2 soluzioni, se $k \neq 0, 3$ compatibile con ∞^1 soluzioni ___ **(pt.4)**
- posto $k = 3$ si determini l'insieme S delle soluzioni del sistema;
  Risposta $S = \{(\alpha, \frac{\alpha+3\beta-1}{2}, \frac{-\alpha-\beta-1}{2}, \beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ ___ **(pt.2)**
- si determinino una base della copertura lineare $\mathcal{L}(S)$ e la sua dimensione;
  Risposta $B_{\mathcal{L}(S)} = ((2, 1, -1, 0), (0, 3, -1, 2), (0, -1, -1, 0))$, $\dim \mathcal{L}(S) = 3$ ___ **(pt.2)**
- si determini il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(S)$ rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4$.
  Risposta $\mathcal{L}((1, -1, 1, 2))$ ___ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k-1 & 1 & 0 \\ 1 & k-1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k risulta diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq 1, 3$ ___ **(pt.3)**
- posto $k = 2$ di determinino, se possibile, una matrice diagonale D simile ad A_2 e la relativa matrice diagonalizzante P.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ___ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ sono dati le rette $r : x + y = 0 = z$ ed $s : y + 2 = 0 = x + 2y - z + 1$ ed il punto $P = (1, -1, 1)$. Si determinino rappresentazioni cartesiane:

- della retta passante per P e incidente sia r che s;
  Risposta $x + y = 0 = x + 3y - z + 3$ ___ **(pt.2)**
- dei piani paralleli a $\pi : x + y + 2 = 0$ che distano 2 da P.
  Risposta $x + y \pm 2\sqrt{2} = 0$ ___ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{R})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k : kx^2 + y^2 - 4xy - 2y = 0$, dove $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $\mathcal{C}_k$ è un'iperbole equilatera e, in questo caso, le coordinate dei suoi punti impropri.
Risposta $k = -1$, $[(1, 2 \pm \sqrt{5}, 0)]$ ___ **(pt.2)**

- Posto $k = 4$ si riconosca $\mathcal{C}_4$ e si determinino, se esistono e sono reali, centro, asintoti, assi e vertici.
  Risposta $C = [(1, 2, 0)]$, $a :\ 10x - 5y + 1 = 0$, $V = (-9/100, 1/50)$ ___ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\tilde{E}_3(\mathbb{R})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 + y^2 - 2z^2 + 2x + 2y - 4z - 1 = 0$, precisando la natura dei punti semplici.
Risposta Iperboloide iperbolico ___ **(pt.3)**

Dati i piani $\alpha : y = 1$ e $\beta : z = 0$ si riconoscano le sezioni piane $\mathcal{C}_\alpha = \mathcal{Q} \cap \alpha$ e $\mathcal{C}_\beta = \mathcal{Q} \cap \beta$.
Risposta $\mathcal{C}_\alpha$: iperbole, $\mathcal{C}_\beta$: circonferenza ___ **(pt.2)**

3

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - IV appello - 26.06.12

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k & k-2 & 0 & k-2 \\ 2 & k-2 & 1 & k-2 \\ k & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = {}^t(x, y, z, t)$ e $B_k = \begin{pmatrix} k-2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale.

- Si discuta al variare di $k \in \mathbb{R}$ la risolubilità del sistema lineare $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni;
  Risposta Se $k = 0, 3$ compatibile con ∞^2 soluzioni, se $k \neq 0, 3$ compatibile con ∞^1 soluzioni **(pt.4)**
- posto $k = 3$ si determini l'insieme S delle soluzioni del sistema;
  Risposta $S = \{(\alpha, \beta, \alpha - 1, 1 - 3\alpha - \beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**
- si determinino una base della copertura lineare $\mathcal{L}(S)$ e la sua dimensione;
  Risposta $B_{\mathcal{L}(S)} = ((1, 0, 1, -3), (0, 1, 0, -1), (0, 0, -1, 1))$, $\dim \mathcal{L}(S) = 3$ **(pt.2)**
- si determini il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(S)$ rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4$.
  Risposta $\mathcal{L}((2, 1, 1, 1))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k risulta diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq 0, 2$ **(pt.3)**
- posto $k = 1$ di determinino, se possibile, una matrice diagonale D simile ad A_1 e la relativa matrice diagonalizzante P.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ sono dati le rette $r : x + y + 1 = 0 = z$ ed $s : y = 0 = x + 2y - z$ ed il punto $P = (-2, 1, 1)$. Si determinino rappresentazioni cartesiane:

- della retta passante per P e incidente sia r che s;
  Risposta $x + y + 1 = 0 = x + 3y - z$ **(pt.2)**
- dei piani paralleli a $\pi : x + y + 3 = 0$ che distano 2 da P.
  Risposta $x + y + 1 \pm 2\sqrt{2} = 0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{R})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k : x^2 + (k+1)y^2 - 2xy + 2x = 0$, dove $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $\mathcal{C}_k$ è un'iperbole equilatera e, in questo caso, le coordinate dei suoi punti impropri.
Risposta $k = -2$, $[(1 \pm \sqrt{2}, 1, 0)]$ **(pt.2)**

- Posto $k = 0$ si riconosca $\mathcal{C}_0$ e si determinino, se esistono e sono reali, centro, asintoti, assi e vertici.
  Risposta Parabola, $C = [(1, 1, 0)]$, $a :\ 2x - 2y + 1 = 0$, $V = (-1/8, 3/8)$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\tilde{E}_3(\mathbb{R})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 - 2y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z + 1 = 0$, precisando la natura dei punti semplici.
Risposta Iperboloide iperbolico **(pt.3)**

Dati i piani $\alpha : y = 0$ e $\beta : z = 0$ si riconoscano le sezioni piane $\mathcal{C}_\alpha = \mathcal{Q} \cap \alpha$ e $\mathcal{C}_\beta = \mathcal{Q} \cap \beta$.
Risposta $\mathcal{C}_\alpha$: circonferenza, $\mathcal{C}_\beta$: iperbole **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - IV appello - 26.06.12

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & k & 0 \\ 1 & k & 2 & k \\ -1 & 1-k & k & 1-k \end{pmatrix}$, $X = {}^t(x, y, z, t)$ e $B_k = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale.

- Si discuta al variare di $k \in \mathbb{R}$ la risolubilità del sistema lineare $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni;
  Risposta Se $k = -2, 1$ compatibile con ∞^2 soluzioni, se $k \neq -2, 1$ compatibile con ∞^1 soluzioni **(pt.4)**
- posto $k = 1$ si determini l'insieme S delle soluzioni del sistema;
  Risposta $S = \{(\alpha, \beta, 1 + \alpha, -3\alpha - \beta - 2) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**
- si determinino una base della copertura lineare $\mathcal{L}(S)$ e la sua dimensione;
  Risposta $B_{\mathcal{L}(S)} = ((1, 0, 1, -3), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -2))$, $\dim \mathcal{L}(S) = 3$ **(pt.2)**
- si determini il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(S)$ rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4$.
  Risposta $\mathcal{L}((1, 1, 2, 1))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & k-1 & 1 \\ 0 & 1 & k-1 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k risulta diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq 1, 3$ **(pt.3)**
- posto $k = 2$ di determinino, se possibile, una matrice diagonale D simile ad A_2 e la relativa matrice diagonalizzante P.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ sono dati le rette $r : y + z = 0 = x$ ed $s : z + 2 = 0 = x - y - 2z - 1$ ed il punto $P = (1, 1, -1)$. Si determinino rappresentazioni cartesiane:

- della retta passante per P e incidente sia r che s;
  Risposta $y + z = 0 = x - y - 3z - 3$ **(pt.2)**
- dei piani paralleli a $\pi : y + z + 2 = 0$ che distano 2 da P.
  Risposta $y + z \pm 2\sqrt{2} = 0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{R})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k : (k-1)x^2 + y^2 - 4xy + 2y = 0$, dove $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $\mathcal{C}_k$ è un'iperbole equilatera e, in questo caso, le coordinate dei suoi punti impropri.
Risposta $k = 0$, $[(1, 2 \pm \sqrt{5}, 0)]$ **(pt.2)**

- Posto $k = 5$ si riconosca $\mathcal{C}_5$ e si determinino, se esistono e sono reali, centro, asintoti, assi e vertici.
  Risposta Parabola, $C = [(1, 2, 0)]$, $a :\ 10x - 5y - 1 = 0$, $V = (9/100, -1/50)$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\tilde{E}_3(\mathbb{R})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} : 2x^2 - y^2 - z^2 + 4x + 2y + 4z + 2 = 0$, precisando la natura dei punti semplici.
Risposta Iperboloide iperbolico **(pt.3)**

Dati i piani $\alpha : x = 0$ e $\beta : z = 0$ si riconoscano le sezioni piane $\mathcal{C}_\alpha = \mathcal{Q} \cap \alpha$ e $\mathcal{C}_\beta = \mathcal{Q} \cap \beta$.
Risposta $\mathcal{C}_\alpha$: circonferenza, $\mathcal{C}_\beta$: iperbole **(pt.2)**