

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 4° Appello - 14.06.2011

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ siano dati il piano $\alpha : x + y = 0$ e le rette $r : \begin{cases} x - 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ e $s_k : \begin{cases} x + kz = 0 \\ x + 2y - kz = 1 \end{cases}$.

Si determinino:

- le equazioni delle sfere di raggio $1/\sqrt{2}$, aventi centro sulla retta r e tangenti al piano α ;
Risposta: $\Sigma_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z + 27/2 = 0$, $\Sigma_2 : x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z + 27/2 = 0$ (pt.2)
- il valore del parametro $k \in \mathbb{R}$ affinché r e s_k siano complanari, determinando in tal caso l'equazione del piano che le contiene entrambe.
Risposta: $k = -2$, $x - 2z = 0$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema lineare:

$$\begin{cases} y = k \\ x + (k+1)z + t = 0 \\ (2k-1)x - 2ky + 2z + kt = k-3 \end{cases}$$

Si discuta al variare di $k \in \mathbb{R}$ la risolubilità del sistema lineare, precisando il numero di soluzioni quando il sistema risulta compatibile.

Risposta: Compatibile $\forall k$; per $k = 1$ esistono ∞^2 soluzioni, per $k \neq 1$ esistono ∞^1 soluzioni _____ (pt.4)

Posto $k = -2$, si determinino:

- le soluzioni S del sistema;
Risposta: $S = \{(-1, -2, t - 1, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t \in \mathbb{R}\}$ _____ (pt.2)
- la dimensione e una base dello spazio vettoriale $\mathcal{L}(S)$ di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$;
Risposta: $B = ((1, 2, 1, 0), (0, 0, 1, 1))$ e $\dim(\mathcal{L}(S)) = 2$ _____ (pt.2)
- la dimensione e una base del complemento ortogonale di $\mathcal{L}(S)$ rispetto al prodotto scalare euclideo.
Risposta: $B' = ((-2, 1, 0, 0), (1, 0, -1, 1))$ e $\dim(\mathcal{L}(S)^\perp) = 2$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo sia dato

$$U = \{(\alpha, -\gamma, \gamma + \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^4(\mathbb{R}) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Si determinino:

- una base ortogonale B' di $\mathcal{L}(U)$ e le componenti c di $v = (2, -1, 3, 1)$ in B' .
Risposta: $B' = ((1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, -1, 0, 1))$, $c = (2, 3, 1)$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{R})$, si consideri al variare del parametro reale k , la famiglia di coniche

$$\mathcal{C}_k : (k-1)x^2 + 2ky^2 + 2kxy + 2ky = 0$$

Si determinino i valori di k in \mathbb{R} per i quali la conica \mathcal{C}_k è generale, semplicemente degenere, doppiamente degenere.
Risposta: se $k \neq 0 \wedge k \neq 1$ la conica è generale, se $k = 1$ la conica è semplicemente degenere, se $k = 0$ la conica è doppiamente degenere. _____ (pt.2)

Posto $k = 2$ si riconosca la conica \mathcal{C}_2 e si determinino, quando esistono e sono reali, centro, asintoti e assi.

Risposta: Parabola, $C = [(2, -1, 0)]$ (improprio); asse: $a : 5x + 10y + 4 = 0$. _____ (pt.3)

ESERCIZIO 5. In $\tilde{E}_3(\mathbb{R})$, si consideri la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 - y^2 + 2z^2 + 2x + 2yz + 1 = 0$ e i piani $\alpha : x + y = 0$ e $\beta : z = 0$.

- Si riconosca la quadrica \mathcal{Q} ;
Risposta: Cono di vertice $V = [(-1, 0, 0, 1)]$ _____ (pt.2)
- si riconoscano le due coniche $\mathcal{C}_1 = \mathcal{Q} \cap \alpha$ e $\mathcal{C}_2 = \mathcal{Q} \cap \beta$.
Risposta: \mathcal{C}_1 : iperbole, \mathcal{C}_2 : riducibile in rette reali e distinte _____ (pt.4)

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 4° Appello - 14.06.2011

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ siano dati il piano $\alpha : x + y = 0$ e le rette $r : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}$ e $s_k : \begin{cases} 2x + ky = 0 \\ kx + z = 0 \end{cases}$.

Si determinino:

- le equazioni delle sfere di raggio $1/\sqrt{2}$, aventi centro sulla retta r e tangenti al piano α ;
Risposta: $\Sigma_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4z + 17/2 = 0$, $\Sigma_2 : x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 4z + 17/2 = 0$ (pt.2)
- il valore del parametro $k \in \mathbb{R}$ affinché r e s_k siano complanari, determinando in tal caso l'equazione del piano che le contiene entrambe.
Risposta: $k = 4$, $x + 2y = 0$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema lineare:

$$\begin{cases} (k+1)x + y + (k+1)z = k+3 \\ (2-2k)x + ky + 2z + 4t = k \\ x + t = 0 \end{cases}$$

Si discuta al variare di $k \in \mathbb{R}$ la risolubilità del sistema lineare, precisando il numero di soluzioni quando il sistema risulta compatibile.

Risposta: Compatibile $\forall k$; per $k = -2$ esistono ∞^2 soluzioni, per $k \neq -2$ esistono ∞^1 soluzioni _____ (pt.4)

Posto $k = 1$, si determinino:

- le soluzioni S del sistema;
Risposta: $S = \{(1/2, \alpha, (3-\alpha)/2, -1/2) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ _____ (pt.2)
- la dimensione e una base dello spazio vettoriale $\mathcal{L}(S)$ di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$;
Risposta: $B = ((1, 0, 3, -1), (0, 2, -1, 0))$ e $\dim(\mathcal{L}(S)) = 2$ _____ (pt.2)
- la dimensione e una base del complemento ortogonale di $\mathcal{L}(S)$ rispetto al prodotto scalare euclideo.
Risposta: $B' = ((-6, 1, 2, 0), (1, 0, 0, 1))$ e $\dim(\mathcal{L}(S)^\perp) = 2$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo sia dato

$$U = \{(\alpha, \alpha + \gamma, \beta, \beta + \gamma) \in \mathbb{R}^4(\mathbb{R}) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Si determinino:

- una base ortogonale B' di $\mathcal{L}(U)$ e le componenti c di $v = (1, 1, 2, 2)$ in B' .
Risposta: $B' = ((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (-1/2, 1/2, -1/2, 1/2))$, $c = (1, 2, 0)$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{R})$, si consideri al variare del parametro reale k , la famiglia di coniche

$$\mathcal{C}_k : kx^2 + (k+2)y^2 + 4kxy + 2kx = 0$$

Si determinino i valori di k in \mathbb{R} per i quali la conica \mathcal{C}_k è generale, semplicemente degenere, doppiamente degenere.
Risposta: se $k \neq 0 \wedge k \neq -2$ la conica è generale, se $k = -2$ la conica è semplicemente degenere, se $k = 0$ la conica è doppiamente degenere. _____ (pt.2)

Posto $k = 2/3$ si riconosca la conica $\mathcal{C}_{2/3}$ e si determinino, quando esistono e sono reali, centro, asintoti e assi.

Risposta: Parabola, $C = [(2, -1, 0)]$ (improprio); asse: $a : 5x + 10y + 1 = 0$. _____ (pt.3)

ESERCIZIO 5. In $\tilde{E}_3(\mathbb{R})$, si consideri la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 + 2y^2 - z^2 + 2x + 2yz + 1 = 0$ e i piani $\alpha : y = 0$ e $\beta : z + 1 = 0$.

- Si riconosca la quadrica \mathcal{Q} ;
Risposta: Cono di vertice $V = [(-1, 0, 0, 1)]$ _____ (pt.2)
- si riconoscano le due coniche $\mathcal{C}_1 = \mathcal{Q} \cap \alpha$ e $\mathcal{C}_2 = \mathcal{Q} \cap \beta$.
Risposta: \mathcal{C}_1 : riducibile in rette reali e distinte, \mathcal{C}_2 : ellisse _____ (pt.4)