UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - IV appello - 7 luglio 2010

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4k \\ 0 & k & -1 \\ 4 & k+2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2k \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- il rango della matrice dei coefficienti;
  Risposta Se $k \neq -\frac{1}{4}, k \neq 1$ si ha $\rho(A_k) = 3$, se $k = -\frac{1}{4}, k = 1$, allora $\rho(A_k) = 2$. **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni;
  Risposta Compatibile per $k \neq -\frac{1}{4}$. Se $k \neq -\frac{1}{4}, k \neq 1$ soluzione unica; se $k = 1$ ∞^1 soluzioni. **(pt.3)**
- posto $k = 1$, l'insieme delle soluzioni del sistema $AX = B$.
  Risposta $\left\{\left(-\frac{5}{4}\alpha - \frac{1}{4}, \alpha + 1, \alpha\right) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = -x + z\}, \qquad W_h = \mathcal{L}((h, 0, h), (h+1, h, 1)),$$

dove h è un parametro reale. Al variare di $h \in \mathbb{R}$ si determinino:

- una base e la dimensione di U e W_h;
  Risposta $\dim U = 2, \mathcal{B}_U = ((1, -1, 0), (0, 1, 1))$,
  se $h = 0$, $\dim W_h = 1, \mathcal{B}_{W_h} = ((1, 0, 1))$, se $h \neq 0$, $\dim W_h = 2, \mathcal{B}_{W_h} = ((h, 0, h), (h+1, h, 1))$ **(pt.2)**
- una base e la dimensione di $U^\perp$;
  Risposta $\dim(U^\perp) = 1, \mathcal{B}_{U^\perp} = ((1, 1, -1))$ **(pt.2)**
- una base e la dimensione di $U \cap W_h$ e di $U + W_h$.
  Risposta Se $h \neq 0$, $\mathcal{B}_{U+W_h} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)), \dim(U + W_h) = 3$, $\mathcal{B}_{U \cap W_h} = ((1, 0, 1)), \dim(U \cap W_h) = 1$
  Se $h = 0$, $\mathcal{B}_{U+W_h} = ((1, -1, 0), (0, 1, 1)), \dim(U + W_h) = 2$, $\mathcal{B}_{U \cap W_h} = ((1, 0, 1)), \dim(U \cap W_h) = 1$. **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$, sono dati il piano $\pi : \ y - z - 2 = 0$ e il punto $P = (0, 4, -2)$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana della retta passante per il punto P e ortogonale al piano π;
  Risposta $x = y + z - 2 = 0$ **(pt.1)**
- un'equazione del fascio di piani passanti per il punto P e ortogonali al piano π;
  Risposta $kx + y + z - 2 = 0, \ k \in \mathbb{R}$ **(pt.1)**
- la proiezione ortogonale H del punto P sul piano π e il simmetrico Q di P rispetto al piano π nella direzione ortogonale;
  Risposta $H(0, 2, 0), \quad Q(0, 0, 2)$ **(pt.2)**
- un'equazione della sfera tangente in H al piano π e passante per P.
  Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 2z + 8 = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ è data la conica di equazione $\mathcal{C}_k \ : \ kx^2 + 2(k+1)xy + ky^2 + 4x + 1 = 0, \ k \in \mathbb{R}$.

- Si stabiliscano i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la conica è riducibile o irriducibile, in tal caso si specifichi per quali valori essa risulta essere una parabola, un'iperbole o un'ellisse.
  Risposta Conica generale per $k \neq -\frac{1}{6}$; se $k < -\frac{1}{2}$ ellisse, se $k = -\frac{1}{2}$ parabola, se $k > -\frac{1}{2}, k \neq -\frac{1}{6}$ iperbole **(pt.3)**
- Posto $k = 1$ si determinino, se esistono e sono reali, asintoti, assi, coordinate del centro di $\mathcal{C}_1$.
  Risposta asintoti: $x - (\sqrt{3} - 2)y + 2 - \frac{4}{3}\sqrt{3} = 0, \ x + (\sqrt{3} + 2)y + 2 + \frac{4}{3}\sqrt{3} = 0$; assi: $x - y - 2 = 0, \ 3x + 3y + 2 = 0$,
  centro: $\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ **(pt.5)**

2

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - IV appello - 7 luglio 2010

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4k-8 \\ 0 & k-2 & -1 \\ 4 & k & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ k-2 \\ 2k-4 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- il rango della matrice dei coefficienti;
  Risposta Se $k \neq \frac{7}{4}, k \neq 3$ si ha $\rho(A_k) = 3$, se $k = \frac{7}{4}, k = 3$, allora $\rho(A_k) = 2$. **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni;
  Risposta Compatibile per $k \neq \frac{7}{4}$. Se $k \neq \frac{7}{4}, k \neq 3$ soluzione unica; se $k = 3$ ∞^1 soluzioni. **(pt.3)**
- posto $k = 3$, l'insieme delle soluzioni del sistema $AX = B$.
  Risposta $\left\{\left(-\frac{5}{4}\alpha - \frac{1}{4}, \alpha + 1, \alpha\right) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = -x + z\}, \qquad W_h = \mathcal{L}((h-1, 0, h-1), (2h, -3, -h)),$$

dove h è un parametro reale. Al variare di $h \in \mathbb{R}$ si determinino:

- una base e la dimensione di U e W_h;
  Risposta $\dim U = 2, \mathcal{B}_U = ((1, -1, 0), (0, 1, 1))$,
  se $h = 1$, $\dim W_h = 1, \mathcal{B}_{W_h} = ((2, -3, -1))$, se $h \neq 1$, $\dim W_h = 2, \mathcal{B}_{W_h} = ((h-1, 0, h-1), (2h, -3, -h))$ **(pt.2)**
- una base e la dimensione di $U^\perp$;
  Risposta $\dim(U^\perp) = 1, \mathcal{B}_{U^\perp} = ((1, 1, -1))$ **(pt.2)**
- una base e la dimensione di $U \cap W_h$ e di $U + W_h$.
  Risposta Se $h \neq 1$, $\mathcal{B}_{U+W_h} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)), \dim(U + W_h) = 3$, $\mathcal{B}_{U \cap W_h} = ((1, 0, 1)), \dim(U \cap W_h) = 1$
  Se $h = 1$, $\mathcal{B}_{U+W_h} = ((1, -1, 0), (0, 1, 1)), \dim(U + W_h) = 2$, $\mathcal{B}_{U \cap W_h} = ((2, -3, -1)), \dim(U \cap W_h) = 1$. **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$, sono dati il piano $\pi :\ y - z - 2 = 0$ e il punto $P = (0, 2, -1)$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana della retta passante per il punto P e ortogonale al piano π;
  Risposta $x = y + z - 1 = 0$ **(pt.1)**
- un'equazione del fascio di piani passanti per il punto P e ortogonali al piano π;
  Risposta $kx + y + z - 1 = 0,\ k \in \mathbb{R}$ **(pt.1)**
- la proiezione ortogonale H del punto P sul piano π e il simmetrico Q di P rispetto al piano π nella direzione ortogonale;
  Risposta $H\left(0, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $Q(0, 1, 0)$ **(pt.2)**
- un'equazione della sfera tangente in H al piano π e passante per P.
  Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{7}{2}y + \frac{3}{2}z + \frac{7}{2} = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ è data la conica di equazione $\mathcal{C}_k \ :\ (k-1)x^2 + 2kxy + (k-1)y^2 + 4x + 1 = 0,\ k \in \mathbb{R}$.

- Si stabiliscano i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la conica è riducibile o irriducibile, in tal caso si specifichi per quali valori essa risulta essere una parabola, un'iperbole o un'ellisse.
  Risposta Conica generale per $k \neq \frac{5}{6}$; se $k < \frac{1}{2}$ ellisse, se $k = \frac{1}{2}$ parabola, se $k > \frac{1}{2}, k \neq \frac{5}{6}$ iperbole **(pt.3)**
- Posto $k = 5$ si determinino, se esistono e sono reali, asintoti, assi, coordinate del centro di $\mathcal{C}_5$.
  Risposta asintoti: $x + 2y + \frac{4}{3} = 0,\ 2x + y - \frac{2}{3} = 0$; assi: $x - y - 2 = 0,\ 9x + 9y + 2 = 0$, centro: $\left(\frac{8}{9}, -\frac{10}{9}\right)$ **(pt.5)**

3

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - IV appello - 7 luglio 2010

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4k-4 \\ 0 & k-1 & -1 \\ 1 & k+1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ k-1 \\ 2k-2 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- il rango della matrice dei coefficienti;
  Risposta Se $k \neq \frac{3}{4}, k \neq 2$ si ha $\rho(A_k) = 3$, se $k = \frac{3}{4}, k = 2$, allora $\rho(A_k) = 2$. **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni;
  Risposta Compatibile per $k \neq \frac{3}{4}$. Se $k \neq \frac{3}{4}, k \neq 2$ soluzione unica; se $k = 2$ ∞^1 soluzioni. **(pt.3)**
- posto $k = 2$, l'insieme delle soluzioni del sistema $AX = B$.
  Risposta $\{(-5\alpha - 1, \alpha + 1, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}, \qquad W_h = \mathcal{L}((h-1, 0, h-1), (2, -2, -2h)),$$

dove h è un parametro reale. Al variare di $h \in \mathbb{R}$ si determinino:

- una base e la dimensione di U e W_h;
  Risposta $\dim U = 2, \mathcal{B}_U = ((1, -1, 0), (0, 0, 1))$,
  se $h = 1$, $\dim W_h = 1, \mathcal{B}_{W_h} = ((2, -2, -2))$, se $h \neq 1$, $\dim W_h = 2, \mathcal{B}_{W_h} = ((h-1, 0, h-1), (2, -2, -2h))$ **(pt.2)**
- una base e la dimensione di $U^\perp$;
  Risposta $\dim(U^\perp) = 1, \mathcal{B}_{U^\perp} = ((1, 1, 0))$ **(pt.2)**
- una base e la dimensione di $U \cap W_h$ e di $U + W_h$.
  Risposta Se $h \neq 1$, $\mathcal{B}_{U+W_h} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)), \dim(U + W_h) = 3$, $\mathcal{B}_{U \cap W_h} = ((1, -1, -h)), \dim(U \cap W_h) = 1$
  Se $h = 1$, $\mathcal{B}_{U+W_h} = ((0, 0, 1), (1, -1, 0)), \dim(U + W_h) = 2$, $\mathcal{B}_{U \cap W_h} = ((1, -1, -1)), \dim(U \cap W_h) = 1$. **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$, sono dati il piano $\pi : \; x - z = 0$ e il punto $P = (0, 4, 2)$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana della retta passante per il punto P e ortogonale al piano π;
  Risposta $y - 4 = x + z - 2 = 0$ **(pt.1)**
- un'equazione del fascio di piani passanti per il punto P e ortogonali al piano π;
  Risposta $x + ky + z - 2 - 4k = 0, \; k \in \mathbb{R}$ **(pt.1)**
- la proiezione ortogonale H del punto P sul piano π e il simmetrico Q di P rispetto al piano π nella direzione ortogonale;
  Risposta $H\,(1, 4, 1)\,, \quad Q(2, 4, 0)$ **(pt.2)**
- un'equazione della sfera tangente in H al piano π e passante per P.
  Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - x - 8y - 3z + 18 = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ è data la conica di equazione $\mathcal{C}_k \; : \; (k-1)x^2 + 2kxy + (k-1)y^2 + 2x + 4y = 0, \; k \in \mathbb{R}$.

- Si stabiliscano i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la conica è riducibile o irriducibile, in tal caso si specifichi per quali valori essa risulta essere una parabola, un'iperbole o un'ellisse.
  Risposta Conica generale per $k \neq 5$; se $k < \frac{1}{2}$ ellisse, se $k = \frac{1}{2}$ parabola, se $k > \frac{1}{2}, k \neq 5$ iperbole **(pt.3)**
- Posto $k = 3$ si determinino, se esistono e sono reali, asintoti, assi, coordinate del centro di $\mathcal{C}_3$.
  Risposta asintoti: $2x + (3 - \sqrt{5})y + 1 + \frac{\sqrt{5}}{5} = 0, \; 2x + (3 + \sqrt{5})y + 1 - \frac{\sqrt{5}}{5} = 0$; assi: $x + y + \frac{3}{5} = 0, \; x - y + 1 = 0$,
  centro: $\left(-\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right)$ **(pt.5)**

4

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - IV appello - 7 luglio 2010

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4k+4 \\ 0 & k+1 & -1 \\ 4 & k+3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ k+1 \\ 2k+2 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- il rango della matrice dei coefficienti;
  Risposta Se $k \neq -\frac{5}{4}, k \neq 0$ si ha $\rho(A_k) = 3$, se $k = -\frac{5}{4}, k = 0$, allora $\rho(A_k) = 2$. **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni;
  Risposta Compatibile per $k \neq -\frac{5}{4}$. Se $k \neq -\frac{5}{4}, k \neq 0$ soluzione unica; se $k = 0$ ∞^1 soluzioni. **(pt.3)**
- posto $k = 0$, l'insieme delle soluzioni del sistema $AX = B$.
  Risposta $\left\{\left(-\frac{5}{4}\alpha - \frac{1}{4}, \alpha + 1, \alpha\right) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y + z\}, \qquad W_h = \mathcal{L}((h-1, 0, h-1), (2h, -3, -h)),$$

dove h è un parametro reale. Al variare di $h \in \mathbb{R}$ si determinino:

- una base e la dimensione di U e W_h;
  Risposta $\dim U = 2, \mathcal{B}_U = ((1, -1, 0), (1, 0, 1))$,
  se $h = 1$, $\dim W_h = 1, \mathcal{B}_{W_h} = ((2, -3, -1))$, se $h \neq 1$, $\dim W_h = 2, \mathcal{B}_{W_h} = ((h-1, 0, h-1), (2h, -3, -h))$ **(pt.2)**
- una base e la dimensione di $U^\perp$;
  Risposta $\dim(U^\perp) = 1, \mathcal{B}_{U^\perp} = ((1, 1, -1))$ **(pt.2)**
- una base e la dimensione di $U \cap W_h$ e di $U + W_h$.
  Risposta Se $h \neq 1$, $\mathcal{B}_{U+W_h} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)), \dim(U + W_h) = 3$, $\mathcal{B}_{U\cap W_h} = ((1, 0, 1)), \dim(U \cap W_h) = 1$
  Se $h = 1$, $\mathcal{B}_{U+W_h} = ((1, -1, 0), (1, 0, 1)), \dim(U + W_h) = 2$, $\mathcal{B}_{U\cap W_h} = ((2, -3, -1)), \dim(U \cap W_h) = 1$. **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$, sono dati il piano $\pi: \ y - z - 4 = 0$ e il punto $P = (0, 2, -1)$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana della retta passante per il punto P e ortogonale al piano π;
  Risposta $x = y + z - 1 = 0$ **(pt.1)**
- un'equazione del fascio di piani passanti per il punto P e ortogonali al piano π;
  Risposta $kx + y + z - 1 = 0,\ k \in \mathbb{R}$ **(pt.1)**
- la proiezione ortogonale H del punto P sul piano π e il simmetrico Q di P rispetto al piano π nella direzione ortogonale;
  Risposta $H\left(0, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, $Q(0, 3, -2)$ **(pt.2)**
- un'equazione della sfera tangente in H al piano π e passante per P.
  Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{9}{2}y + \frac{5}{2}z + \frac{13}{2} = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ è data la conica di equazione $\mathcal{C}_k \ : \ (k-1)x^2 + 2kxy + (k-1)y^2 + 4y + 1 = 0,\ k \in \mathbb{R}$.

- Si stabiliscano i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la conica è riducibile o irriducibile, in tal caso si specifichi per quali valori essa risulta essere una parabola, un'iperbole o un'ellisse.
  Risposta Conica generale per $k \neq \frac{5}{6}$; se $k < \frac{1}{2}$ ellisse, se $k = \frac{1}{2}$ parabola, se $k > \frac{1}{2}, k \neq \frac{5}{6}$ iperbole **(pt.3)**
- Posto $k = 5$ si determinino, se esistono e sono reali, asintoti, assi, coordinate del centro di $\mathcal{C}_5$.
  Risposta asintoti: $x + 2y - \frac{2}{3} = 0,\ 2x + y + \frac{4}{3} = 0$; assi: $x - y + 2 = 0,\ 9x + 9y + 2 = 0$, centro: $\left(-\frac{10}{9}, \frac{8}{9}\right)$ **(pt.5)**

5

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - IV appello - 7 luglio 2010

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4k \\ 0 & -k & -1 \\ 4 & 2-k & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -k \\ -2k \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- il rango della matrice dei coefficienti;
  Risposta Se $k \neq -1, k \neq \frac{1}{4}$ si ha $\rho(A_k) = 3$, se $k = -1, k = \frac{1}{4}$, allora $\rho(A_k) = 2$. **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni;
  Risposta Compatibile per $k \neq \frac{1}{4}$. Se $k \neq \frac{1}{4}, k \neq -1$ soluzione unica; se $k = -1$ ∞^1 soluzioni. **(pt.3)**
- posto $k = -1$, l'insieme delle soluzioni del sistema $AX = B$.
  Risposta $\left\{\left(-\frac{5}{4}\alpha - \frac{1}{4}, \alpha + 1, \alpha\right) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\}, \qquad W_h = \mathcal{L}((h, 0, h), (h+1, h, 1)),$$

dove h è un parametro reale. Al variare di $h \in \mathbb{R}$ si determinino:

- una base e la dimensione di U e W_h;
  Risposta $\dim U = 2, \mathcal{B}_U = ((1, 0, 1), (0, 1, 0))$,
  se $h = 0$, $\dim W_h = 1, \mathcal{B}_{W_h} = ((1, 0, 1)))$, se $h \neq 0$, $\dim W_h = 2, \mathcal{B}_{W_h} = ((h, 0, h), (h+1, h, 1))$ **(pt.2)**
- una base e la dimensione di $U^\perp$;
  Risposta $\dim(U^\perp) = 1, \mathcal{B}_{U^\perp} = ((1, 0, -1))$ **(pt.2)**
- una base e la dimensione di $U \cap W_h$ e di $U + W_h$.
  Risposta Se $h \neq 0$, $\mathcal{B}_{U+W_h} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)), \dim(U + W_h) = 3$, $\mathcal{B}_{U \cap W_h} = ((1, 0, 1)), \dim(U \cap W_h) = 1$
  Se $h = 0$, $\mathcal{B}_{U+W_h} = ((1, 0, 1), (0, 1, 0)), \dim(U + W_h) = 2$, $\mathcal{B}_{U \cap W_h} = ((1, 0, 1)), \dim(U \cap W_h) = 1$. **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$, sono dati il piano $\pi: \ y - z = 0$ e il punto $P = (2, 0, -2)$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana della retta passante per il punto P e ortogonale al piano π;
  Risposta $x - 2 = y + z + 2 = 0$ **(pt.1)**
- un'equazione del fascio di piani passanti per il punto P e ortogonali al piano π;
  Risposta $kx + y + z - 2k + 2 = 0$, $k \in \mathbb{R}$ **(pt.1)**
- la proiezione ortogonale H del punto P sul piano π e il simmetrico Q di P rispetto al piano π nella direzione ortogonale;
  Risposta $H\,(2, -1, -1)$, $\ Q(2, -2, 0)$ **(pt.2)**
- un'equazione della sfera tangente in H al piano π e passante per P.
  Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + y + 3z + 6 = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ è data la conica di equazione $\mathcal{C}_k \ : \ kx^2 + 2(k+1)xy + ky^2 + 4x + 2y = 0$, $k \in \mathbb{R}$.

- Si stabiliscano i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la conica è riducibile o irriducibile, in tal caso si specifichi per quali valori essa risulta essere una parabola, un'iperbole o un'ellisse.
  Risposta Conica generale per $k \neq 4$; se $k < -\frac{1}{2}$ ellisse, se $k = -\frac{1}{2}$ parabola, se $k > -\frac{1}{2}, k \neq 4$ iperbole **(pt.3)**
- Posto $k = 1$ si determinino, se esistono e sono reali, asintoti, assi, coordinate del centro di $\mathcal{C}_1$.
  Risposta asintoti: $x + (2 - \sqrt{3})y + 2 - \sqrt{3} = 0$, $x + (2 + \sqrt{3})y + 2 + \sqrt{3} = 0$; assi: $x + y + 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$, centro: $(0, -1)$ **(pt.5)**

$$\boxed{6}$$

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - IV appello - 7 luglio 2010

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8k \\ 0 & 2k & -1 \\ 1 & 2k+2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \\ 4k \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- il rango della matrice dei coefficienti;
  Risposta Se $k \neq -\frac{1}{8}, k \neq \frac{1}{2}$ si ha $\rho(A_k) = 3$, se $k = -\frac{1}{8}, k = \frac{1}{2}$, allora $\rho(A_k) = 2$. ____ **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni;
  Risposta Compatibile per $k \neq -\frac{1}{8}$. Se $k \neq -\frac{1}{8}, k \neq \frac{1}{2}$ soluzione unica; se $k = \frac{1}{2}$ ∞^1 soluzioni. ____ **(pt.3)**
- posto $k = \frac{1}{2}$, l'insieme delle soluzioni del sistema $AX = B$.
  Risposta $\{(-5\alpha - 1, \alpha + 1, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ ____ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y + z\}, \qquad W_h = \mathcal{L}((h, 0, h), (h+1, h, 1)),$$

dove h è un parametro reale. Al variare di $h \in \mathbb{R}$ si determinino:

- una base e la dimensione di U e W_h;
  Risposta $\dim U = 2, \mathcal{B}_U = ((1, -1, 0), (1, 0, 1))$,
  se $h = 0$, $\dim W_h = 1, \mathcal{B}_{W_h} = ((1, 0, 1))$, se $h \neq 0$, $\dim W_h = 2, \mathcal{B}_{W_h} = ((h, 0, h), (h+1, h, 1))$ ____ **(pt.2)**
- una base e la dimensione di $U^\perp$;
  Risposta $\dim(U^\perp) = 1, \mathcal{B}_{U^\perp} = ((1, 1, -1))$ ____ **(pt.2)**
- una base e la dimensione di $U \cap W_h$ e di $U + W_h$.
  Risposta Se $h \neq 0$, $\mathcal{B}_{U+W_h} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)), \dim(U + W_h) = 3$, $\mathcal{B}_{U\cap W_h} = ((1, 0, 1)), \dim(U \cap W_h) = 1$
  Se $h = 0$, $\mathcal{B}_{U+W_h} = ((1, -1, 0), (1, 0, 1)), \dim(U + W_h) = 2$, $\mathcal{B}_{U\cap W_h} = ((1, 0, 1)), \dim(U \cap W_h) = 1$. ____ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$, sono dati il piano $\pi :\ y - z + 4 = 0$ e il punto $P = (0, 4, -2)$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana della retta passante per il punto P e ortogonale al piano π;
  Risposta $x = y + z - 2 = 0$ ____ **(pt.1)**
- un'equazione del fascio di piani passanti per il punto P e ortogonali al piano π;
  Risposta $kx + y + z - 2 = 0,\ k \in \mathbb{R}$ ____ **(pt.1)**
- la proiezione ortogonale H del punto P sul piano π e il simmetrico Q di P rispetto al piano π nella direzione ortogonale;
  Risposta $H\,(0, -1, 3)$, $\ Q(0, -6, 8)$ ____ **(pt.2)**
- un'equazione della sfera tangente in H al piano π e passante per P.
  Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 3y - z - 10 = 0$ ____ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ è data la conica di equazione $\mathcal{C}_k\ :\ kx^2 + 2(k+1)xy + ky^2 + 4y + 1 = 0,\ k \in \mathbb{R}$.

- Si stabiliscano i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la conica è riducibile o irriducibile, in tal caso si specifichi per quali valori essa risulta essere una parabola, un'iperbole o un'ellisse.
  Risposta Conica generale per $k \neq -\frac{1}{6}$; se $k < -\frac{1}{2}$ ellisse, se $k = -\frac{1}{2}$ parabola, se $k > -\frac{1}{2}, k \neq -\frac{1}{6}$ iperbole ____ **(pt.3)**
- Posto $k = 1$ si determinino, se esistono e sono reali, asintoti, assi, coordinate del centro di $\mathcal{C}_1$.
  Risposta asintoti: $x + (2 - \sqrt{3})y + \frac{2}{3}\sqrt{3} = 0,\ x + (2 + \sqrt{3})y - \frac{2}{3}\sqrt{3} = 0$; assi: $3x + 3y + 2 = 0,\ x - y + 2 = 0$, centro: $\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ____ **(pt.5)**