UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - III appello - 30.03.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Si trovino, al variare del parametro reale k, gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.

  Risposta $k \neq 1,2$ $\lambda = 1,2,k$ con $a_{(\lambda)} = g_{(\lambda)} = 1$,
  $k = 2:$ $\lambda = 1,2$ con $a_{(2)} = g_{(2)} = 2, a_{(1)} = g_{(1)} = 1$,
  $k = 1:$ $\lambda = 1,2$ con $a_{(1)} = 2\, g_{(1)} = 1, a_{(2)} = g_{(2)} = 1$ ______ **(pt.3)**
- Si dica per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.

  Risposta $k \neq 1$ ______ **(pt.2)**
- Posto $k = 2$ si trovi una matrice diagonale simile ad A_2 e la relativa matrice diagonalizzante.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & k & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ k-1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice dei coefficienti;

  Risposta $k \neq 2 \wedge k \neq 3 : \rho(A) = 3, \quad k = 2 \vee k = 3 : \rho(A) = 2$ ______ **(pt.2)**
- il rango della matrice completa;

  Risposta $k \neq 3 : \rho(A|B) = 3, \quad k = 3 : \rho(A|B) = 2$ ______ **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.

  Risposta compatibile per $k \neq 2$; $k \neq 2 \wedge k \neq 3 : \exists!\ sol$, $k = 3 : \infty^1 sol$ ______ **(pt.2)**
- Posto $k = 3$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX = B$.

  Risposta $\{(5 - 10a, 7a - 3, a) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $r : \begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x - hy = h \\ x - z = h \end{cases}$.

- Si determini per quali valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ le rette sono complanari.

  Risposta $h = 1$ ______ **(pt.3)**
- Posto $h = 1$ si determini un'equazione cartesiana del piano che contiene le due rette.

  Risposta $y - z = 0$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k$ di equazione cartesiana $2kx^2 + 2(k-2)xy - 4y^2 + 2x + 1 = 0$.

- Si stabiliscano i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la conica $\mathcal{C}_k$ è riducibile o irriducibile, in quest'ultimo caso si specifichi per quali valori di k risulta essere una parabola, un'iperbole o un'ellisse.

  Risposta $k = 0 \vee k = -4 : \mathcal{C}_k$ è riducibile, $k \neq 0 \wedge k \neq -4 : \mathcal{C}_k$ è irriducibile,
  $k = -2 : \mathcal{C}_{-2}$ è una parabola,
  $k \neq -2, 0, -4 : \mathcal{C}_k$ è una iperbole,
  $\mathcal{C}_k$ non è mai una ellisse ______ **(pt.3)**
- Posto $k = 1$ si determinino, se esistono e sono reali, asintoti, centro (proprio o improprio) e assi della conica.

  Risposta $C = (\frac{-4}{9}, \frac{1}{9})$, asintoti: $3x - 6y + 2 = 0$, $3x + 3y + 1 = 0$ e assi: $9(3 + \sqrt{10})x - 9y + 13 + 4\sqrt{10} = 0$,
  $9(3 - \sqrt{10})x - 9y + 13 - 4\sqrt{10} = 0$. ______ **(pt.5)**

2

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - III appello - 30.03.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 2 & k \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Si trovino, al variare del parametro reale k, gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.
  Risposta $k \neq 0, 2$ $\lambda = 0, 2, k$ con $a_{(\lambda)} = g_{(\lambda)} = 1$,
  $k = 2:$ $\lambda = 0, 2$ con $a_{(2)} = g_{(2)} = 2, a_{(0)} = g_{(0)} = 1$,
  $k = 0:$ $\lambda = 0, 2$ con $a_{(0)} = 2\, g_{(0)} = 1, a_{(2)} = g_{(2)} = 1$ ________ **(pt.3)**
- Si dica per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq 0$ ________ **(pt.2)**
- Posto $k = 2$ si trovi una matrice diagonale simile ad A_2 e la relativa matrice diagonalizzante.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} -k & k-1 & 1 \\ 0 & k-1 & k \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice dei coefficienti;
  Risposta $k \neq 1 \wedge k \neq 2 : \rho(A) = 3, \quad k = 1 \vee k = 2 : \rho(A) = 2$ ________ **(pt.2)**
- il rango della matrice completa;
  Risposta $k \neq 2 : \rho(A|B) = 3, \quad k = 2 : \rho(A|B) = 2$ ________ **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta compatibile per $k \neq 1$; $k \neq 1 \wedge k \neq 2 : \exists!\ sol,$ $k = 2 : \infty^1 sol$ ________ **(pt.2)**
- Posto $k = 2$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX = B$.
  Risposta $\{(a, 4a+1, -2a) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $r : \begin{cases} x + z = 1 \\ y + hz = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 3 - h \end{cases}$.

- Si determini per quali valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ le rette sono complanari.
  Risposta $h = 0 \vee h = 2$ ________ **(pt.3)**
- Posto $h = 2$ si determini un'equazione cartesiana del piano che contiene le due rette.
  Risposta $x + z = 1$ ________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k$ di equazione cartesiana $x^2 + (k-2)xy + y^2 - 4 = 0$.

- Si stabiliscano i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la conica $\mathcal{C}_k$ è riducibile o irriducibile, in quest'ultimo caso si specifichi per quali valori di k risulta essere una parabola, un'iperbole o un'ellisse.
  Risposta $k = 0 \vee k = 4 : \mathcal{C}_k$ è riducibile, $k \neq 0 \wedge k \neq 4 : \mathcal{C}_k$ è irriducibile,
  $k < 0 \vee k > 4 : \mathcal{C}_k$ è una iperbole,
  $0 < k < 4 : \mathcal{C}_k$ è una ellisse,
  $\mathcal{C}_k$ non è mai una parabola ________ **(pt.3)**
- Posto $k = 6$ si determinino, se esistono e sono reali, asintoti, centro (proprio o improprio) e assi della conica.
  Risposta $C = (0, 0)$, asintoti: $(\sqrt{3} - 2)x - y = 0$, $(\sqrt{3} + 2)x + y = 0$ e assi: $x - y = 0$, $x + y = 0$ _ **(pt.5)**

3

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - III appello - 30.03.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

- Si trovino, al variare del parametro reale k, gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.

  Risposta $k \neq -1, 2$ $\lambda = -1, 2, k$ con $a_{(\lambda)} = g_{(\lambda)} = 1$,
  $k = 2:$ $\lambda = -1, 2$ con $a_{(2)} = g_{(2)} = 2, a_{(-1)} = g_{(-1)} = 1$,
  $k = -1:$ $\lambda = -1, 2$ con $a_{(-1)} = 2\, g_{(-1)} = 1, a_{(2)} = g_{(2)} = 1$ ________ **(pt.3)**
- Si dica per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.

  Risposta $k \neq -1$ ________ **(pt.2)**
- Posto $k = 2$ si trovi una matrice diagonale simile ad A_2 e la relativa matrice diagonalizzante.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & k \\ k & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice dei coefficienti;

  Risposta $k \neq 0 \wedge k \neq \frac{1}{2} : \rho(A) = 3, \quad k = 0 \vee k = \frac{1}{2} : \rho(A) = 2$ ________ **(pt.2)**
- il rango della matrice completa;

  Risposta $k \neq \frac{1}{2} : \rho(A|B) = 3, \quad k = \frac{1}{2} : \rho(A|B) = 2$ ________ **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.

  Risposta compatibile per $k \neq 0$; $k \neq 0 \wedge k \neq \frac{1}{2} : \exists!\ sol$, $k = \frac{1}{2} : \infty^1 sol$ ________ **(pt.2)**
- Posto $k = \frac{1}{2}$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX = B$.

  Risposta $\{(1 - 2a, a, -4a) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $r : \begin{cases} y + z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} y - hz = h \\ -x + y = h \end{cases}$.

- Si determini per quali valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ le rette sono complanari.

  Risposta $h = 1$ ________ **(pt.3)**
- Posto $h = 1$ si determini un'equazione cartesiana del piano che contiene le due rette.

  Risposta $x - z = 0$ ________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k$ di equazione cartesiana $(2k-1)x^2 + 6kxy + ky^2 + 2x = 0$.

- Si stabiliscano i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la conica $\mathcal{C}_k$ è riducibile o irriducibile, in quest'ultimo caso si specifichi per quali valori di k risulta essere una parabola, un'iperbole o un'ellisse.

  Risposta $k = 0 : \mathcal{C}_k$ è riducibile, $k \neq 0 : \mathcal{C}_k$ è irriducibile,
  $k < \frac{-1}{7} \vee k > 0 : \mathcal{C}_k$ è una iperbole,
  $\frac{-1}{7} < k < 0 : \mathcal{C}_k$ è una ellisse,
  $k = -\frac{1}{7} : \mathcal{C}_k$ è una parabola ________ **(pt.3)**
- Posto $k = 1$ si determinino, se esistono e sono reali, asintoti, centro (proprio o improprio) e assi della conica.

  Risposta $C = (\frac{1}{8}, \frac{-3}{8})$, asintoti: $8(2\sqrt{2} - 3)x - 8y - 2\sqrt{2} = 0$, $8(2\sqrt{2} + 3)x + 8y - 2\sqrt{2} = 0$ e assi: $2x - 2y - 1 = 0$, $4x + 4y + 1 = 0$. ________ **(pt.5)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - III appello - 30.03.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- Si trovino, al variare del parametro reale k, gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.

  Risposta $k \neq 1, 4 \quad \lambda = 1, 4, k$ con $a_{(\lambda)} = g_{(\lambda)} = 1$,
  $k = 4: \quad \lambda = 1, 4$ con $a_{(4)} = g_{(4)} = 2, a_{(1)} = g_{(1)} = 1$,
  $k = 1: \quad \lambda = 1, 4$ con $a_{(1)} = 2\, g_{(1)} = 1, a_{(4)} = g_{(4)} = 1$ ______ **(pt.3)**
- Si dica per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.

  Risposta $k \neq 1$ ______ **(pt.2)**
- Posto $k = 4$ si trovi una matrice diagonale simile ad A_4 e la relativa matrice diagonalizzante.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & k & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2k-2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice dei coefficienti;

  Risposta $k \neq 2 \wedge k \neq 3 : \rho(A) = 3, \quad k = 2 \vee k = 3 : \rho(A) = 2$ ______ **(pt.2)**
- il rango della matrice completa;

  Risposta $k \neq 3 : \rho(A|B) = 3, \quad k = 3 : \rho(A|B) = 2$ ______ **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.

  Risposta compatibile per $k \neq 2$; $\quad k \neq 2 \wedge k \neq 3 : \exists!\ sol, \quad k = 3 : \infty^1 sol$ ______ **(pt.2)**
- Posto $k = 3$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX = B$.

  Risposta $\{(10 - 10a, 7a - 6, a) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $r : \begin{cases} x + (h-1)y = 0 \\ x + z = 1 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} y = 0 \\ x + z = -2 - h \end{cases}$.

- Si determini per quali valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ le rette sono complanari.

  Risposta $h = -3$ ______ **(pt.3)**
- Posto $h = -3$ si determini un'equazione cartesiana del piano che contiene le due rette.

  Risposta $x + z = 1$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k$ di equazione cartesiana $2kx^2 + 2(k-2)xy - 4y^2 + 2x + 2 = 0$.

- Si stabiliscano i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la conica $\mathcal{C}_k$ è riducibile o irriducibile, in quest'ultimo caso si specifichi per quali valori di k risulta essere una parabola, un'iperbole o un'ellisse.

  Risposta $k = -2 + \sqrt{2} \vee k = -2 - \sqrt{2} : \mathcal{C}_k$ è riducibile, $k \neq -2 + \sqrt{2} \wedge k \neq -2 - \sqrt{2} : \mathcal{C}_k$ è irriducibile,
  $k = -2 : \mathcal{C}_{-2}$ è una parabola,
  $k \neq -2, -2 + \sqrt{2}, -2 - \sqrt{2} : \mathcal{C}_k$ è una iperbole,
  $\mathcal{C}_k$ non è mai una ellisse ______ **(pt.3)**
- Posto $k = 1$ si determinino, se esistono e sono reali, asintoti, centro (proprio o improprio) e assi della conica.

  Risposta $C = (-\frac{4}{9}, \frac{1}{9})$, asintoti: $3x - 6y + 2 = 0$, $3x + 3y + 1 = 0$ e assi: $9(3 + \sqrt{10})x - 9y + 13 + 4\sqrt{10} = 0$, $9(3 - \sqrt{10})x - 9y + 13 - 4\sqrt{10} = 0$. ______ **(pt.5)**

5

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - III appello - 30.03.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 4 & k \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- Si trovino, al variare del parametro reale k, gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.

  Risposta $k \neq 0, 4 \quad \lambda = 0, 4, k$ con $a_{(\lambda)} = g_{(\lambda)} = 1$,
  $k = 4: \quad \lambda = 0, 4$ con $a_{(4)} = g_{(4)} = 2, a_{(0)} = g_{(0)} = 1$,
  $k = 0: \quad \lambda = 0, 4$ con $a_{(0)} = 2\, g_{(0)} = 1, a_{(4)} = g_{(4)} = 1$ **(pt.3)**

- Si dica per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.

  Risposta $k \neq 0$ **(pt.2)**

- Posto $k = 4$ si trovi una matrice diagonale simile ad A_4 e la relativa matrice diagonalizzante.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} -k & k-1 & 1 \\ 0 & k-1 & k \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice dei coefficienti;

  Risposta $k \neq 1 \wedge k \neq 2 : \rho(A) = 3, \quad k = 1 \vee k = 2 : \rho(A) = 2$ **(pt.2)**

- il rango della matrice completa;

  Risposta $k \neq 2 : \rho(A|B) = 3, \quad k = 2 : \rho(A|B) = 2$ **(pt.2)**

- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.

  Risposta compatibile per $k \neq 1$; $\quad k \neq 1 \wedge k \neq 2 : \exists!\ sol, \qquad k = 2 : \infty^1 sol$ **(pt.2)**

- Posto $k = 2$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX = B$.

  Risposta $\{(a, 4a + 2, -2a) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $r : \begin{cases} hx + y = 0 \\ x + z = 1 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 3 - h \end{cases}$.

- Si determini per quali valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ le rette sono complanari.

  Risposta $h = 0 \vee h = 2$ **(pt.3)**

- Posto $h = 2$ si determini un'equazione cartesiana del piano che contiene le due rette.

  Risposta $x + z = 1$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k$ di equazione cartesiana $x^2 + (k-2)xy + y^2 - 8 = 0$.

- Si stabiliscano i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la conica $\mathcal{C}_k$ è riducibile o irriducibile, in quest'ultimo caso si specifichi per quali valori di k risulta essere una parabola, un'iperbole o un'ellisse.

  Risposta $k = 0 \vee k = 4 : \mathcal{C}_k$ è riducibile, $k \neq 0 \wedge k \neq 4 : \mathcal{C}_k$ è irriducibile,
  $k < 0 \vee k > 4 : \mathcal{C}_k$ è una iperbole,
  $0 < k < 4 : \mathcal{C}_k$ è una ellisse,
  $\mathcal{C}_k$ non è mai una parabola **(pt.3)**

- Posto $k = 6$ si determinino, se esistono e sono reali, asintoti, centro (proprio o improprio) e assi della conica.

  Risposta $C = (0, 0)$, asintoti: $(\sqrt{3} - 2)x - y = 0$, $(\sqrt{3} + 2)x + y = 0$ e assi: $x - y = 0$, $x + y = 0$ **(pt.5)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - III appello - 30.03.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

- Si trovino, al variare del parametro reale k, gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.
  Risposta $k \neq -1, 2$ $\lambda = -1, 2, k$ con $a_{(\lambda)} = g_{(\lambda)} = 1$,
  $k = 2:$ $\lambda = -1, 2$ con $a_{(2)} = g_{(2)} = 2, a_{(-1)} = g_{(-1)} = 1$,
  $k = -1:$ $\lambda = -1, 2$ con $a_{(-1)} = 2\, g_{(-1)} = 1, a_{(2)} = g_{(2)} = 1$ **(pt.3)**
- Si dica per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq -1$ **(pt.2)**
- Posto $k = 2$ si trovi una matrice diagonale simile ad A_2 e la relativa matrice diagonalizzante.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & k \\ k & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice dei coefficienti;
  Risposta $k \neq 0 \wedge k \neq \frac{1}{2} : \rho(A) = 3$, $k = 0 \vee k = \frac{1}{2} : \rho(A) = 2$ **(pt.2)**
- il rango della matrice completa;
  Risposta $k \neq \frac{1}{2} : \rho(A|B) = 3$, $k = \frac{1}{2} : \rho(A|B) = 2$ **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta compatibile per $k \neq 0$; $k \neq 0 \wedge k \neq \frac{1}{2} : \exists!\, sol$, $k = \frac{1}{2} : \infty^1 sol$ **(pt.2)**
- Posto $k = \frac{1}{2}$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX = B$.
  Risposta $\{(2 - 2a, a, -4a) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $r : \begin{cases} x + y = 1 \\ y + (h-1)z = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} z = 0 \\ x + y = -2 - h \end{cases}$.

- Si determini per quali valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ le rette sono complanari.
  Risposta $h = -3$ **(pt.3)**
- Posto $h = -3$ si determini un'equazione cartesiana del piano che contiene le due rette.
  Risposta $x + y = 1$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k$ di equazione cartesiana $(2k-1)x^2 + 6kxy + ky^2 + 4x = 0$.

- Si stabiliscano i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la conica $\mathcal{C}_k$ è riducibile o irriducibile, in quest'ultimo caso si specifichi per quali valori di k risulta essere una parabola, un'iperbole o un'ellisse.
  Risposta $k = 0 : \mathcal{C}_k$ è riducibile, $k \neq 0 : \mathcal{C}_k$ è irriducibile,
  $k < \frac{-1}{7} \vee k > 0 : \mathcal{C}_k$ è una iperbole,
  $\frac{-1}{7} < k < 0 : \mathcal{C}_k$ è una ellisse,
  $k = -\frac{1}{7} : \mathcal{C}_k$ è una parabola **(pt.3)**
- Posto $k = 1$ si determinino, se esistono e sono reali, asintoti, centro (proprio o improprio) e assi della conica.
  Risposta $C = (\frac{1}{4}, \frac{-3}{4})$, asintoti: $4(2\sqrt{2}-3)x - 4y - 2\sqrt{2} = 0$, $4(2\sqrt{2}+3)x + 4y - 2\sqrt{2} = 0$ e assi: $x - y - 1 = 0$, $2x + 2y + 1 = 0$. **(pt.5)**