UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 2^o appello - 28/01/2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2k-3 \\ 3 & 1 & k \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ k-1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_kX = B_k$ precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile.

  Risposta Compatibile per $k \neq 2$; $k \neq 1, 2$ soluzione unica, $k = 1$ ∞^1 soluzioni ______ **(pt.3)**

- interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati dalle tre equazioni del sistema al variare del parametro reale k.

  Risposta $k \neq 1, 2$ i piani, tutti distinti, hanno esattamente un punto in comune, $k = 1$ i piani, tutti distinti, appartengono a un fascio proprio, $k = 2$ i piani sono a due a due incidenti in rette parallele fra loro ___ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Si determinino, se possibile, una matrice D diagonale simile ad A e una corrispondente matrice diagonalizzante P;

  Risposta $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

- si determini, se possibile, una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di A.

  Risposta $\mathcal{B} = ((0, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), (1, 0, 0, 0), (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0, -1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}))$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ si considerino i due sottospazi $U_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} k+2 & 0 \\ k & k-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix}\right)$ e $W_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$ le dimensioni di U_k e W_k;

  Risposta $\dim U_k = 2 \quad \forall\, k \in \mathbb{R}$, $k = 2$ $\dim W_k = 1$, $k \neq 2$ $\dim W_k = 2$ ______ **(pt.2)**

- si determinino i valori di k per cui la somma $U_k + W_k$ è diretta;

  Risposta $k \neq 0$ ______ **(pt.2)**

- posto $k = -1$ si determini un complemento diretto di W_{-1}.

  Risposta $W'_{-1} = U_{-1}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $E_2(\mathbb{R})$ si determinino le coordinate del punto P' simmetrico di $P = (1, -3)$ rispetto alla retta r : $x + 4y + 2 = 0$ nella direzione $[(1, 2)]$.

Risposta $P' = (3, 1)$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k$: $x^2 + 2kxy + (k+1)y^2 - kx = 0$, dove k è un parametro reale. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui:

- la conica $\mathcal{C}_k$ è generale;

  Risposta $k \neq -1, 0$ ______ **(pt.1)**

- la conica $\mathcal{C}_k$ ha come centro il punto $C = [(2, -1, 2)]$;

  Risposta $k = 1$ ______ **(pt.2)**

- la conica $\mathcal{C}_k$ ammette come asintoto la retta a : $x + 3y - 3 = 0$.

  Risposta $k = 2$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana del luogo $\mathcal{Q}$ delle rette che proiettano dal punto $V_\infty = [(1, 0, -1, 0)]$ i punti della curva $\mathcal{C}$: $x^2 + 2y^2 - 4xy + 2z - 3 = 0 = x + y$.

Risposta $7y^2 + 2x + 2y + 2z - 3 = 0$ ______ **(pt.3)**

Si determinino, motivando la scelta, un piano α che sezioni la quadrica $\mathcal{Q}$ secondo una conica riducibile e un piano β che sezioni $\mathcal{Q}$ secondo una conica irriducibile.

Risposta α : $y = 0$ $(V_\infty \in \alpha)$, β : $x + y = 0$ $(V_\infty \notin \beta)$ ______ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 2^o appello - 28/01/2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 2k-4 & 1 & -1 \\ k-1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k-2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_k X = B_k$ precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile.

  Risposta Compatibile per $k \neq 2, 3$; soluzione unica. **(pt.3)**

- interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati dalle tre equazioni del sistema al variare del parametro reale k.

  Risposta $k \neq 2, 3$ i piani, tutti distinti, hanno esattamente un punto in comune; $k = 3$ i piani α e β sono paralleli, γ è ad essi incidente; $k = 2$ i piani sono a due a due incidenti in rette parallele fra loro **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- Si determinino, se possibile, una matrice D diagonale simile ad A e una corrispondente matrice diagonalizzante P;

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

- si determini, se possibile, una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di A.

  Risposta $\mathcal{B} = ((0,0,0,1), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0), (-1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 0), (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 0)$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ si considerino i due sottospazi $U_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} k & 0 \\ k-2 & k-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$ e $W_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} k-2 & 0 \\ 0 & k-5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k-1 & 1 \end{pmatrix}\right)$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$ le dimensioni di U_k e W_k;

  Risposta $k = 2$ $\dim U_k = 1$, $k \neq 2$ $\dim U_k = 2$, $\dim W_k = 2$ $\forall\, k \in \mathbb{R}$ **(pt.2)**

- si determinino i valori di k per cui la somma $U_k + W_k$ è diretta;

  Risposta $k \neq 4$ **(pt.2)**

- posto $k = 1$ si determini un complemento diretto di W_1.

  Risposta $W_1' = U_1$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $E_2(\mathbb{R})$ si determinino le coordinate del punto P' simmetrico di $P = (-3, -2)$ rispetto alla retta $r : x + 4y + 2 = 0$ nella direzione $[(1, 2)]$.

Risposta $P' = (-1, 2)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k : \ 2x^2 + 2kxy + (k+2)y^2 - kx = 0$, dove k è un parametro reale. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui:

- la conica $\mathcal{C}_k$ è generale;

  Risposta $k \neq -2, 0$ **(pt.1)**

- la conica $\mathcal{C}_k$ ha come centro il punto $C = [(2, -1, 2)]$;

  Risposta $k = 2$ **(pt.2)**

- la conica $\mathcal{C}_k$ ammette come asintoto la retta $a : \ x + 3y - 3 = 0$.

  Risposta $k = 4$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana del luogo $\mathcal{Q}$ delle rette che proiettano dal punto $V = (1, 0, 0)$ i punti della curva $\mathcal{C} : \ x^2 + 2y^2 - 4xy + 2z = 0 = x + y$.

Risposta $7y^2 - 2xz - 2yz + 2z = 0$ **(pt.3)**

Si determinino, motivando la scelta, un piano α che sezioni la quadrica $\mathcal{Q}$ secondo una conica riducibile e un piano β che sezioni $\mathcal{Q}$ secondo una conica irriducibile.

Risposta $\alpha : \ x = 1 \quad (V \in \alpha)$, $\beta : \ x + y = 0 \quad (V \notin \beta)$ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 2^o appello - 28/01/2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k+2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2k+1 \\ 3 & 1 & k+2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ k+1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_k X = B_k$ precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile.

  Risposta Compatibile per $k \neq 0$; $k \neq -1, 0$ soluzione unica, $k = -1$ ∞^1 soluzioni ______ **(pt.3)**

- interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati dalle tre equazioni del sistema al variare del parametro reale k.

  Risposta $k \neq -1, 0$ i piani, tutti distinti, hanno esattamente un punto in comune, $k = -1$ i piani, tutti distinti, appartengono a un fascio proprio, $k = 0$ i piani sono a due a due incidenti in rette parallele fra loro ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Si determinino, se possibile, una matrice D diagonale simile ad A e una corrispondente matrice diagonalizzante P;

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

- si determini, se possibile, una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di A.

  Risposta $\mathcal{B} = ((1,0,0,0), (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0, -1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}), (0, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}))$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ si considerino i due sottospazi $U_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} k+1 & 0 \\ k-1 & k-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & 1 \end{pmatrix}\right)$ e $W_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} k-1 & 0 \\ 0 & k-4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$ le dimensioni di U_k e W_k;

  Risposta $\dim U_k = 2 \;\; \forall\, k \in \mathbb{R}$, $k = 3 \;\; \dim W_k = 1$, $k \neq 3 \;\; \dim W_k = 2$ ______ **(pt.2)**

- si determinino i valori di k per cui la somma $U_k + W_k$ è diretta;

  Risposta $k \neq 1$ ______ **(pt.2)**

- posto $k = 2$ si determini un complemento diretto di W_2.

  Risposta $W_2' = U_2$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $E_2(\mathbb{R})$ si determinino le coordinate del punto P' simmetrico di $P = (5, -4)$ rispetto alla retta $r : x + 4y + 2 = 0$ nella direzione $[(1, 2)]$.

Risposta $P' = (7, 0)$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k : \; x^2 + 2(k-2)xy + (k-1)y^2 - (k-2)x = 0$, dove k è un parametro reale. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui:

- la conica $\mathcal{C}_k$ è generale;

  Risposta $k \neq 1, 2$ ______ **(pt.1)**

- la conica $\mathcal{C}_k$ ha come centro il punto $C = [(2, -1, 2)]$;

  Risposta $k = 3$ ______ **(pt.2)**

- la conica $\mathcal{C}_k$ ammette come asintoto la retta $a : \; x + 3y - 3 = 0$.

  Risposta $k = 4$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana del luogo $\mathcal{Q}$ delle rette che proiettano dal punto $V_\infty = [(1, 0, 1, 0)]$ i punti della curva $\mathcal{C} : \; x^2 + 2y^2 - 4xy + 2z - 3 = 0 = x + y$.

Risposta $7y^2 - 2x - 2y + 2z - 3 = 0$ ______ **(pt.3)**

Si determinino, motivando la scelta, un piano α che sezioni la quadrica $\mathcal{Q}$ secondo una conica riducibile e un piano β che sezioni $\mathcal{Q}$ secondo una conica irriducibile.

Risposta $\alpha : \; y = 0 \;\; (V_\infty \in \alpha)$, $\beta : \; x + y = 0 \;\; (V_\infty \notin \beta)$ ______ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - **Algebra ed Elementi di Geometria** - 2^o appello - 28/01/2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 2k & 1 & -1 \\ k+1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & k \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_kX = B_k$ precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile.

  Risposta Compatibile per $k \neq 0, 1$; soluzione unica. **(pt.3)**

- interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati dalle tre equazioni del sistema al variare del parametro reale k.

  Risposta $k \neq 0, 1$ i piani, tutti distinti, hanno esattamente un punto in comune; $k = 1$ i piani α e β sono paralleli, γ è ad essi incidente; $k = 0$ i piani sono a due a due incidenti in rette parallele fra loro **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Si determinino, se possibile, una matrice D diagonale simile ad A e una corrispondente matrice diagonalizzante P;

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

- si determini, se possibile, una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di A.

  Risposta $\mathcal{B} = ((0, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), (1, 0, 0, 0), (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0, -1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ si considerino i due sottospazi $U_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} k-3 & 0 \\ k-1 & k-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$ e $W_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} k-1 & 0 \\ 0 & k-4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & 1 \end{pmatrix}\right)$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$ le dimensioni di U_k e W_k;

  Risposta $k = 1$ $\dim U_k = 1$, $k \neq 1$ $\dim U_k = 2$, $\dim W_k = 2$ $\forall\, k \in \mathbb{R}$ **(pt.2)**

- si determinino i valori di k per cui la somma $U_k + W_k$ è diretta;

  Risposta $k \neq 7$ **(pt.2)**

- posto $k = 2$ si determini un complemento diretto di W_2.

  Risposta $W_2' = U_2$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $E_2(\mathbb{R})$ si determinino le coordinate del punto P' simmetrico di $P = (3, 1)$ rispetto alla retta $r : x + 4y + 2 = 0$ nella direzione $[(1, 2)]$.

Risposta $P' = (1, -3)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k : \; x^2 + 2(k+2)xy + (k+3)y^2 - (k+2)x = 0$, dove k è un parametro reale. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui:

- la conica $\mathcal{C}_k$ è generale;

  Risposta $k \neq -3, -2$ **(pt.1)**

- la conica $\mathcal{C}_k$ ha come centro il punto $C = [(2, -1, 2)]$;

  Risposta $k = -1$ **(pt.2)**

- la conica $\mathcal{C}_k$ ammette come asintoto la retta $a : \; x + 3y - 3 = 0$.

  Risposta $k = 0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana del luogo $\mathcal{Q}$ delle rette che proiettano dal punto $V = (0, 1, 0)$ i punti della curva $\mathcal{C} : \; x^2 + 2y^2 - 4xy + 2z = 0 = x + y$.

Risposta $7x^2 - 2xz - 2yz + 2z = 0$ **(pt.3)**

Si determinino, motivando la scelta, un piano α che sezioni la quadrica $\mathcal{Q}$ secondo una conica riducibile e un piano β che sezioni $\mathcal{Q}$ secondo una conica irriducibile.

Risposta $\alpha : \; y = 1 \quad (V \in \alpha)$, $\quad \beta : \; x + y = 0 \quad (V \notin \beta)$ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 2^o appello - 28/01/2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k-2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2k-7 \\ 3 & 1 & k-2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ k-3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_k X = B_k$ precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile.

  Risposta Compatibile per $k \neq 4$; $k \neq 3, 4$ soluzione unica, $k = 3$ ∞^1 soluzioni **(pt.3)**

- interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati dalle tre equazioni del sistema al variare del parametro reale k.

  Risposta $k \neq 3, 4$ i piani, tutti distinti, hanno esattamente un punto in comune, $k = 3$ i piani, tutti distinti, appartengono a un fascio proprio, $k = 4$ i piani sono a due a due incidenti in rette parallele fra loro **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- Si determinino, se possibile, una matrice D diagonale simile ad A e una corrispondente matrice diagonalizzante P;

  Risposta $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

- si determini, se possibile, una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di A.

  Risposta $\mathcal{B} = ((0,0,0,1), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0), (-1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 0), (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 0))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ si considerino i due sottospazi $U_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} k+3 & 0 \\ k+1 & k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k+2 & 1 \end{pmatrix}\right)$ e $W_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} k+1 & 0 \\ 0 & k-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$ le dimensioni di U_k e W_k;

  Risposta $\dim U_k = 2 \quad \forall\, k \in \mathbb{R}$, $k = 1$ $\dim W_k = 1$, $k \neq 1$ $\dim W_k = 2$ **(pt.2)**

- si determinino i valori di k per cui la somma $U_k + W_k$ è diretta;

  Risposta $k \neq -1$ **(pt.2)**

- posto $k = 2$ si determini un complemento diretto di W_2.

  Risposta $W_2' = U_2$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $E_2(\mathbb{R})$ si determinino le coordinate del punto P' simmetrico di $P = (-1, 2)$ rispetto alla retta $r:$ $x + 4y + 2 = 0$ nella direzione $[(1, 2)]$.

Risposta $P' = (-3, -2)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k:\ x^2 + 2(k-1)xy + ky^2 - (k-1)x = 0$, dove k è un parametro reale. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui:

- la conica $\mathcal{C}_k$ è generale;

  Risposta $k \neq 0, 1$ **(pt.1)**

- la conica $\mathcal{C}_k$ ha come centro il punto $C = [(2, -1, 2)]$;

  Risposta $k = 2$ **(pt.2)**

- la conica $\mathcal{C}_k$ ammette come asintoto la retta $a:\ x + 3y - 3 = 0$.

  Risposta $k = 3$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana del luogo $\mathcal{Q}$ delle rette che proiettano dal punto $V_\infty = [(0, -1, 1, 0)]$ i punti della curva $\mathcal{C}:\ x^2 + 2y^2 - 4xy + 2z - 3 = 0 = x + y - 1$.

Risposta $7x^2 - 6x + 2y + 2z - 3 = 0$ **(pt.3)**

Si determinino, motivando la scelta, un piano α che sezioni la quadrica $\mathcal{Q}$ secondo una conica riducibile e un piano β che sezioni $\mathcal{Q}$ secondo una conica irriducibile.

Risposta $\alpha:\ x = 0 \quad (V_\infty \in \alpha)$, $\beta:\ x + y = 1 \quad (V_\infty \notin \beta)$ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 2^o appello - 28/01/2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 2k+4 & 1 & -1 \\ k+3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & k+2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k+2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_k X = B_k$ precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile.

  Risposta Compatibile per $k \neq -2, -1$; soluzione unica. **(pt.3)**

- interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati dalle tre equazioni del sistema al variare del parametro reale k.

  Risposta $k \neq -2, -1$ i piani, tutti distinti, hanno esattamente un punto in comune; $k = -1$ i piani α e β sono paralleli, γ è ad essi incidente; $k = -2$ i piani sono a due a due incidenti in rette parallele fra loro **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

- Si determinino, se possibile, una matrice D diagonale simile ad A e una corrispondente matrice diagonalizzante P;

  Risposta $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

- si determini, se possibile, una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di A.

  Risposta $\mathcal{B} = ((1,0,0,0), (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0, -1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}), (0, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ si considerino i due sottospazi $U_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} k+2 & 0 \\ k & k+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ e $W_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix}\right)$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$ le dimensioni di U_k e W_k;

  Risposta $k = 0$ $\dim U_k = 1$, $k \neq 0$ $\dim U_k = 2$, $\dim W_k = 2$ $\forall\, k \in \mathbb{R}$ **(pt.2)**

- si determinino i valori di k per cui la somma $U_k + W_k$ è diretta;

  Risposta $k \neq 6$ **(pt.2)**

- posto $k = -1$ si determini un complemento diretto di W_{-1}.

  Risposta $W'_{-1} = U_{-1}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $E_2(\mathbb{R})$ si determinino le coordinate del punto P' simmetrico di $P = (7, 0)$ rispetto alla retta r : $x + 4y + 2 = 0$ nella direzione $[(1, 2)]$.

Risposta $P' = (5, -4)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k$: $x^2 + 2(k+1)xy + (k+2)y^2 - (k+1)x = 0$, dove k è un parametro reale. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui:

- la conica $\mathcal{C}_k$ è generale;

  Risposta $k \neq -2, -1$ **(pt.1)**

- la conica $\mathcal{C}_k$ ha come centro il punto $C = [(2, -1, 2)]$;

  Risposta $k = 0$ **(pt.2)**

- la conica $\mathcal{C}_k$ ammette come asintoto la retta a : $x + 3y - 3 = 0$.

  Risposta $k = 1$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana del luogo $\mathcal{Q}$ delle rette che proiettano dal punto $V = (-1, 0, 0)$ i punti della curva $\mathcal{C}$: $x^2 + 2y^2 - 4xy + 2z = 0 = x + y$.

Risposta $7y^2 + 2xz + 2yz + 2z = 0$ **(pt.3)**

Si determinino, motivando la scelta, un piano α che sezioni la quadrica $\mathcal{Q}$ secondo una conica riducibile e un piano β che sezioni $\mathcal{Q}$ secondo una conica irriducibile.

Risposta α : $x = -1$ $(V \in \alpha)$, β : $x + y = 0$ $(V \notin \beta)$ **(pt.2)**