UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Secondo appello - 4 febbraio 2010

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & k & 0 \\ 0 & 0 & k+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;
  Risposta $k \neq -1, 1, 3,\ \ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = k,\ \lambda_4 = k+2,\ \ a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i} = 1$ per $i = 1, 2, 3, 4$,
  $k = -1,\ \ \lambda_1 = -1, a_{-1} = g_{-1} = 2,\ \lambda_2 = 3, a_3 = g_3 = 1,\ \lambda_3 = 1, a_1 = g_1 = 1,$
  $k = 1,\ \ \lambda_1 = 1, a_1 = g_1 = 2,\ \lambda_2 = 3, a_3 = g_3 = 2,$
  $k = 3,\ \ \lambda_1 = 3, a_3 = 2, g_3 = 1,\ \lambda_2 = 1, a_1 = g_1 = 1,\ \lambda_3 = 5, a_5 = g_5 = 1.$ **(pt.4)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k è diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq 3$ **(pt.2)**
- posto $k = 1$, una matrice D, diagonale, simile ad A_1 e la matrice diagonalizzante P.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si consideri l'insieme

$$U = \{(-1, 1, 2, -2), (0, 0, 3, 3), (1, 0, 0, 0), (2, -2, -1, 7)\}$$

e si determinino la dimensione di $\mathcal{L}(U)$ e una sua base ortogonale;
Risposta $\dim \mathcal{L}(U) = 3, \quad \mathcal{B}_{\mathcal{L}(U)} = ((1, 0, 0, 0), (0, 0, 3, 3), (0, 1, 2, -2))$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ è data la conica $\mathcal{C}$ di equazione: $x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 6y + 9 = 0$.

- La si riconosca;
  Risposta parabola **(pt.2)**
- si determinino, se esistono e sono reali, asintoti, assi, coordinate dei vertici e del centro della conica $\mathcal{C}$;
  Risposta centro $C = [(1, 1, 0)]$, asse: $x - y + 1 = 0$, vertice: $V = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ **(pt.3)**
- si determini un'equazione della retta tangente a $\mathcal{C}$ nel punto $P = (8, 3)$.
  Risposta $x - 2y - 2 = 0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $E_3(\mathbb{R})$, sono dati la retta $r : \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$, la retta $s : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$ e il punto $P = (1, 0, 3)$.
Si determinino:

- un'equazione cartesiana della retta parallela a r, passante per P;
  Risposta $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$ **(pt.2)**
- le equazioni cartesiane dei piani passani per P, paralleli a r, che distano $\sqrt{\frac{7}{2}}$ dal punto $Q = (2, 0, 0)$;
  Risposta $x - 3y - 2z + 5 = 0, \quad 2x + y + 3z - 11 = 0$ **(pt.2)**
- un'equazione cartesiana della retta di minima distanza tra r ed s.
  Risposta $\begin{cases} 3y + 1 = 0 \\ 3x - 3z - 1 = 0 \end{cases}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ sono date le rette $r : \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases}$, la retta $s : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. Si determinino:

- un'equazione della quadrica $\mathcal{Q}$ ottenuta dalla rotazione della retta r attorno alla retta s e si classifichi tale quadrica;
  Risposta $\mathcal{Q} \ :\ x^2 + y^2 - 5z^2 + 2z - 1 = 0$, iperboloide iperbolico **(pt.2)**
- un'equazione della sezione di $\mathcal{Q}$ con il piano $\pi \ :\ y - \sqrt{7}z = 0$ e si riconosca tale sezione piana.
  Risposta $\begin{cases} x^2 + z^2 + 2z - 1 = 0 \\ y - \sqrt{7}z = 0 \end{cases}$, ellisse **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Secondo appello - 4 febbraio 2010

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k+1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & k+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;
  Risposta $k \neq 1,2,3, \quad \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = k+2,\ \lambda_4 = k+1, \quad a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i} = 1$ per $i = 1,2,3,4$,
  $k = 1, \quad \lambda_1 = 3, a_3 = g_3 = 2,\ \lambda_2 = 4, a_4 = g_4 = 1,\ \lambda_3 = 2, a_2 = g_2 = 1,$
  $k = 2, \quad \lambda_1 = 4, a_4 = g_4 = 2,\ \lambda_2 = 3, a_3 = 2, g_3 = 1,$
  $k = 3, \quad \lambda_1 = 4, a_4 = g_4 = 2,\ \lambda_2 = 3, a_3 = g_3 = 1,\ \lambda_3 = 5, a_5 = g_5 = 1.$ **(pt.4)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k è diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq 2$ **(pt.2)**
- posto $k = 1$, una matrice D, diagonale, simile ad A_1 e la matrice diagonalizzante P.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si consideri l'insieme

$$U = \{(2,0,0,-1),(3,1,2,6),(0,0,1,0),(1,-1,-5,-8)\}$$

e si determinino la dimensione di $\mathcal{L}(U)$ e una sua base ortogonale;
Risposta $\dim \mathcal{L}(U) = 3, \quad \mathcal{B}_{\mathcal{L}(U)} = ((2,0,0,-1),(0,0,1,0),(3,1,0,6))$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ è data la conica $\mathcal{C}$ di equazione: $x^2 + y^2 - 2xy - 6x - 2y + 9 = 0$.

- La si riconosca;
  Risposta parabola **(pt.2)**
- si determinino, se esistono e sono reali, asintoti, assi, coordinate dei vertici e del centro della conica $\mathcal{C}$;
  Risposta centro $C = [(1,1,0)]$, asse: $x - y - 1 = 0$, vertice: $V = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ **(pt.3)**
- si determini un'equazione della retta tangente a $\mathcal{C}$ nel punto $P = (3,8)$.
  Risposta $2x - y + 2 = 0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $E_3(\mathbb{R})$, sono dati la retta $r : \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$, la retta $s : \begin{cases} x - 2z = 0 \\ x + y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ e il punto $P = (0,2,4)$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana della retta parallela a r, passante per P;
  Risposta $\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{cases}$ **(pt.2)**
- le equazioni cartesiane dei piani passani per P, paralleli a r, che distano $\frac{3}{\sqrt{2}}$ dal punto $Q = (1,0,0)$;
  Risposta $x + z - 4 = 0, \quad x - y + 2 = 0$ **(pt.2)**
- un'equazione cartesiana della retta di minima distanza tra r ed s.
  Risposta $\begin{cases} 21x + 7y + 13 = 0 \\ 14x + 7z + 5 = 0 \end{cases}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ sono date le rette $r : \begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases}$, la retta $s : \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. Si determinino:

- un'equazione della quadrica $\mathcal{Q}$ ottenuta dalla rotazione della retta r attorno alla retta s e si classifichi tale quadrica;
  Risposta $\mathcal{Q} : 2x^2 - y^2 + 2z^2 + 2y - 2 = 0$, iperboloide iperbolico **(pt.2)**
- un'equazione della sezione di $\mathcal{Q}$ con il piano $\pi : x - z = 0$ e si riconosca tale sezione piana.
  Risposta $\begin{cases} 4x^2 - y^2 + 2y - 2 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$, iperbole **(pt.2)**

$$\boxed{3}$$

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Secondo appello - 4 febbraio 2010

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k+1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & k+3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;
  Risposta $k \neq -2, 0, 2,\ \ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = k+1,\ \lambda_4 = k+3,\ \ a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i} = 1$ per $i = 1, 2, 3, 4$,
  $k = -2,\ \ \lambda_1 = 1, a_1 = g_1 = 2,\ \lambda_2 = 3, a_3 = g_3 = 1,\ \lambda_3 = -1, a_{-1} = g_{-1} = 1$,
  $k = 0,\ \ \lambda_1 = 1, a_1 = g_1 = 2,\ \lambda_2 = 3, a_3 = g_3 = 2$,
  $k = 2,\ \ \lambda_1 = 3, a_3 = 2, g_3 = 1,\ \lambda_2 = 1, a_1 = g_1 = 1,\ \lambda_3 = 5, a_5 = g_5 = 1.$ ______ **(pt.4)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k è diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq 2$ ______ **(pt.2)**
- posto $k = 0$, una matrice D, diagonale, simile ad A_0 e la matrice diagonalizzante P.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\quad P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si consideri l'insieme

$$U = \{(-1, 1, 5, -5), (0, 0, -1, -1), (1, 0, 0, 0), (2, 1, 1, -9)\}$$

e si determinino la dimensione di $\mathcal{L}(U)$ e una sua base ortogonale;
Risposta $\dim \mathcal{L}(U) = 3,\quad \mathcal{B}_{\mathcal{L}(U)} = ((0, 1, 5, -5), (0, 0, -1, -1), (1, 0, 0, 0))$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ è data la conica $\mathcal{C}$ di equazione: $x^2 + y^2 + 2xy - 2x + 6y + 9 = 0$.

- La si riconosca;
  Risposta parabola ______ **(pt.2)**
- si determinino, se esistono e sono reali, asintoti, assi, coordinate dei vertici e del centro della conica $\mathcal{C}$;
  Risposta centro $C = [(1, -1, 0)]$, asse: $x + y + 1 = 0$, vertice: $V = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ ______ **(pt.3)**
- si determini un'equazione della retta tangente a $\mathcal{C}$ nel punto $P = (8, -3)$.
  Risposta $x + 2y - 2 = 0$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $E_3(\mathbb{R})$, sono dati la retta $r : \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$, la retta $s : \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - 3z = 0 \end{cases}$ e il punto $P = (1, 0, 3)$.
Si determinino:

- un'equazione cartesiana della retta parallela a r, passante per P;
  Risposta $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ y - z + 3 = 0 \end{cases}$ ______ **(pt.2)**
- le equazioni cartesiane dei piani passani per P, paralleli a r, che distano $\sqrt{\frac{7}{2}}$ dal punto $Q = (2, 0, 0)$;
  Risposta $x + 3y - 2z + 5 = 0,\quad 2x - y + 3z - 11 = 0$ ______ **(pt.2)**
- un'equazione cartesiana della retta di minima distanza tra r ed s.
  Risposta $\begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ 8x - 4y - 7 = 0 \end{cases}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ sono date le rette $r : \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$, la retta $s : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. Si determinino:

- un'equazione della quadrica $\mathcal{Q}$ ottenuta dalla rotazione della retta r attorno alla retta s e si classifichi tale quadrica;
  Risposta $\mathcal{Q}\ :\ x^2 + y^2 - 5z^2 - 14z - 10 = 0$, iperboloide iperbolico ______ **(pt.2)**
- un'equazione della sezione di $\mathcal{Q}$ con il piano $\pi\ :\ y - \sqrt{6}z = 0$ e si riconosca tale sezione piana.
  Risposta $\begin{cases} x^2 + z^2 - 14z - 10 = 0 \\ y - \sqrt{6}z = 0 \end{cases}$, ellisse ______ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Secondo appello - 4 febbraio 2010

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & k & 0 \\ 0 & 0 & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;
  Risposta $k \neq 2,3,4,\quad \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = k,\ \lambda_4 = k+1,\quad a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i} = 1$ per $i = 1,2,3,4$,
  $k = 2,\quad \lambda_1 = 3, a_3 = g_3 = 2,\ \lambda_2 = 4, a_4 = g_4 = 1,\ \lambda_3 = 2, a_2 = g_2 = 1$,
  $k = 3,\quad \lambda_1 = 4, a_4 = g_4 = 2,\ \lambda_2 = 3, a_3 = 2, g_3 = 1$,
  $k = 4,\quad \lambda_1 = 4, a_4 = g_4 = 2,\ \lambda_2 = 3, a_3 = g_3 = 1,\ \lambda_3 = 5, a_5 = g_5 = 1$. **(pt.4)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k è diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq 3$ **(pt.2)**
- posto $k = 4$, una matrice D, diagonale, simile ad A_4 e la matrice diagonalizzante P.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},\quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si consideri l'insieme

$$U = \{(0,0,1,0), (0,2,0,-1), (3,1,-4,2), (3,-3,-1,4)\}$$

e si determinino la dimensione di $\mathcal{L}(U)$ e una sua base ortogonale;
Risposta $\dim \mathcal{L}(U) = 3,\quad \mathcal{B}_{\mathcal{L}(U)} = ((0,0,1,0), (0,2,0,-1), (3,1,0,2))$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ è data la conica $\mathcal{C}$ di equazione: $x^2 + y^2 + 2xy + 6x - 2y + 9 = 0$.

- La si riconosca;
  Risposta parabola **(pt.2)**
- si determinino, se esistono e sono reali, asintoti, assi, coordinate dei vertici e del centro della conica $\mathcal{C}$;
  Risposta centro $C = [(1,-1,0)]$, asse: $x + y + 1 = 0$, vertice: $V = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ **(pt.3)**
- si determini un'equazione della retta tangente a $\mathcal{C}$ nel punto $P = (-3, 8)$.
  Risposta $2x + y - 2 = 0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $E_3(\mathbb{R})$, sono dati la retta $r : \begin{cases} x - z = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$, la retta $s : \begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ e il punto $P = (0, 2, -4)$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana della retta parallela a r, passante per P;
  Risposta $\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x - z - 4 = 0 \end{cases}$ **(pt.2)**
- le equazioni cartesiane dei piani passani per P, paralleli a r, che distano $\sqrt{\frac{13}{2}}$ dal punto $Q = (0, 3, 0)$;
  Risposta $x + 3y - 4z - 22 = 0,\quad 4x - y - 3z - 10 = 0$ **(pt.2)**
- un'equazione cartesiana della retta di minima distanza tra r ed s.
  Risposta $\begin{cases} x - z = 0 \\ 4x + 2y + 5 = 0 \end{cases}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ sono date le rette $r : \begin{cases} 2x - y + 2 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases}$, la retta $s : \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. Si determinino:

- un'equazione della quadrica $\mathcal{Q}$ ottenuta dalla rotazione della retta r attorno alla retta s e si classifichi tale quadrica;
  Risposta $\mathcal{Q}\ :\ 2x^2 - y^2 + 2z^2 + 6y - 10 = 0$, iperboloide iperbolico **(pt.2)**
- un'equazione della sezione di $\mathcal{Q}$ con il piano $\pi\ :\ x - z = 0$ e si riconosca tale sezione piana.
  Risposta $\begin{cases} 4x^2 - y^2 + 6y - 10 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$, iperbole **(pt.2)**