UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 18.01.2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si dica per quali valori del parametro reale k il seguente sistema risulta compatibile e, in caso affermativo, si stabilisca il numero delle soluzioni

$$\begin{cases} x + ky = 0 \\ (k-1)x + z = -k \\ kx + y = k+1 \end{cases}$$

Risposta Il sistema è compatibile per $k \neq 1$. Per $k \neq \pm 1$ il sistema ammette una ed una sola soluzione, per $k = -1$ il sistema ammette ∞^1 soluzioni **(pt.4)**

Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$, si dica quale è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati ordinatamente dalle equazioni del sistema, al variare del parametro reale k.

Risposta Per $k \neq \pm 1$ i tre piani appartengono ad una stella propria di piani di centro $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ dove (x_0, y_0, z_0) è l'unica soluzione del sistema, per $k = 1$ i piani non hanno punti in comune (α e γ sono paralleli e distinti e β incide entrambi), per $k = -1$ i tre piani appartengono ad un fascio proprio (β incide $\alpha = \gamma$). **(pt.3)**

Posto $k = -1$ si determinino

- l'insieme S delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S = \{(a, a, 2a+1) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

- il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(S)$.

  Risposta $\mathcal{L}(S)^\perp = \{(b, -b, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid b \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

Posto k =1, sia r la retta data dall'intersezione di α e β ed s la retta ottenuta intersecando β e γ. Si determini una rappresentazione cartesiana della superficie generata dalla rotazione della retta r attorno alla retta s.

Risposta $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy - 4x - 4y + 4z + 2 = 0$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}: \ x^2 + y^2 - 2xy + 4y - 1 = 0$. Si riconosca la conica $\mathcal{C}$ e si determinino, se esistono e sono reali, centro (proprio o improprio), asintoti, assi e vertici di $\mathcal{C}$.

Risposta Parabola, $C_\infty = [(1, 1, 0)]$, asse: $x - y - 1 = 0$, vertice: $V = (1, 0)$, non ci sono asintoti **(pt.5)**

ESERCIZIO 3. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & k & 1 \\ -2 & 1 & k \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale.

- Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k risulta diagonalizzabile.

  Risposta $k \neq 3$ **(pt.3)**

- Posto $k = 1$ si determinino una matrice diagonale D simile ad A_1 e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione $x^2 - y^2 + xy + xz + x + y - z - 3 = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$;

  Risposta Cono di vertice $V = (1, 1, -4)$ **(pt.2)**

- si determinino, se possibile, un'equazione di un piano che seziona la quadrica $\mathcal{Q}$ secondo una coppia di rette, motivando la risposta, e, in caso sia possibile, rappresentazioni cartesiane delle rette stesse.

  Risposta Qualunque piano passante per il vertice soddisfa la condizione richiesta. Sezionando con $x = 1$ si determina una conica riducibile in $r: x - 1 = y - 1 = 0$ contata due volte. **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 18.01.2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si dica per quali valori del parametro reale k il seguente sistema risulta compatibile e, in caso affermativo, si stabilisca il numero delle soluzioni

$$\begin{cases} 3x + ky - z = 0 \\ (k-1)x + z = 0 \\ kx + y = k + 1 \end{cases}$$

Risposta Il sistema è compatibile per $k \neq 2$. Per $k \neq -1, 2$ il sistema ammette una ed una sola soluzione, per $k = -1$ il sistema ammette ∞^1 soluzioni ______ **(pt.4)**

Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$, si dica quale è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati ordinatamente dalle equazioni del sistema, al variare del parametro reale k.

Risposta Per $k \neq -1, 2$ i tre piani appartengono ad una stella propria di piani di centro $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ dove (x_0, y_0, z_0) è l'unica soluzione del sistema, per $k = 2$ i piani non hanno punti in comune (sono a due a due incidenti secondo rette parallele e distinte), per $k = -1$ i tre piani, distinti a due a due, appartengono ad un fascio proprio. **(pt.3)**

Posto $k = -1$ si determinino

- l'insieme S delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S = \{(a, a, 2a) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

- il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(S)$.

  Risposta $\mathcal{L}(S)^\perp = \{(2b, 2c, -b - c) \in \mathbb{R}^3 \mid b, c \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

Posto k =0, sia r la retta data dall'intersezione di α e γ ed s la retta ottenuta intersecando β e γ. Si determini una rappresentazione cartesiana della superficie generata dalla rotazione della retta r attorno alla retta s.

Risposta $3x^2 + 8y^2 + 3z^2 - 10xz - 16y + 8 = 0$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}:\ 4x^2 + y^2 - 6y = 0$. Si riconosca la conica $\mathcal{C}$ e si determinino, se esistono e sono reali, centro (proprio o improprio), asintoti, assi e vertici di $\mathcal{C}$.

Risposta Ellisse, $C = (0, 3)$, assi: $x = 0,\ y = 3$ vertici: $(0, 0); (0, 6); \left(\pm\frac{3}{2}, 3\right)$, non ha asintoti reali **(pt.5)**

ESERCIZIO 3. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & k & 1 \\ -3 & 1 & k \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale.

- Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k risulta diagonalizzabile.

  Risposta $k \neq 4$ ______ **(pt.3)**

- Posto $k = 2$ si determinino una matrice diagonale D simile ad A_2 e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione $x^2 - y^2 + xy + xz - 2x - y - 3z - 4 = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$;

  Risposta Cono di vertice $V = (3, 1, -5)$ ______ **(pt.2)**

- si determinino, se possibile, un'equazione di un piano che seziona la quadrica $\mathcal{Q}$ secondo una coppia di rette, motivando la risposta, e, in caso sia possibile, rappresentazioni cartesiane delle rette stesse.

  Risposta Qualunque piano passante per il vertice soddisfa la condizione richiesta. Sezionando con $x = 3$ si determina una conica riducibile in $r : x - 3 = y - 1 = 0$ contata due volte. ______ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 18.01.2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si dica per quali valori del parametro reale k il seguente sistema risulta compatibile e, in caso affermativo, si stabilisca il numero delle soluzioni

$$\begin{cases} x - ky - z = -1 \\ (k-1)x + z = 1 - k \\ kx + y = k + 1 \end{cases}$$

Risposta Il sistema è compatibile per $k \neq -1$. Per $k \neq -1, 0$ il sistema ammette una ed una sola soluzione, per $k = 0$ il sistema ammette ∞^1 soluzioni **(pt.4)**

Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$, si dica quale è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati ordinatamente dalle equazioni del sistema, al variare del parametro reale k.

Risposta Per $k \neq -1, 0$ i tre piani appartengono ad una stella propria di piani di centro $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ dove (x_0, y_0, z_0) è l'unica soluzione del sistema, per $k = -1$ i piani non hanno punti in comune (sono a due a due incidenti secondo rette parallele e distinte), per $k = 0$ i tre piani appartengono ad un fascio proprio (γ incide $\alpha = \beta$). **(pt.3)**

Posto $k = 0$ si determinino

- l'insieme S delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S = \{(a-1, 1, a) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

- il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(S)$.

  Risposta $\mathcal{L}(S)^\perp = \{(b, b, -b) \in \mathbb{R}^3 \mid b \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

Posto k =1, sia r la retta data dall'intersezione di α e γ ed s la retta ottenuta intersecando β e γ. Si determini una rappresentazione cartesiana della superficie generata dalla rotazione della retta r attorno alla retta s.

Risposta $x^2 + y^2 - 2z^2 - 6xy + 8x - 2 = 0$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}: \ x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 2y = 0$. Si riconosca la conica $\mathcal{C}$ e si determinino, se esistono e sono reali, centro (proprio o improprio), asintoti, assi e vertici di $\mathcal{C}$.

Risposta Parabola, $C_\infty = [(1, 1, 0)]$, asse: $x - y = 0$, vertice: $V = (0, 0)$, non ci sono asintoti **(pt.5)**

ESERCIZIO 3. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale.

- Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k risulta diagonalizzabile.

  Risposta $k \neq 0$ **(pt.3)**

- Posto $k = -2$ si determinino una matrice diagonale D simile ad A_{-2} e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione $x^2 - y^2 + xy + xz - 2x + 2y - 2z - 4 = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$;

  Risposta Cono di vertice $V = (2, 2, -4)$ **(pt.2)**

- si determinino, se possibile, un'equazione di un piano che seziona la quadrica $\mathcal{Q}$ secondo una coppia di rette, motivando la risposta, e, in caso sia possibile, rappresentazioni cartesiane delle rette stesse.

  Risposta Qualunque piano passante per il vertice soddisfa la condizione richiesta. Sezionando con $x = 2$ si determina una conica riducibile in $r: x - 2 = y - 2 = 0$ contata due volte. **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 18.01.2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si dica per quali valori del parametro reale k il seguente sistema risulta compatibile e, in caso affermativo, si stabilisca il numero delle soluzioni

$$\begin{cases} (k-1)y+z=0 \\ x+(k-2)z=1-k \\ y+(k-1)z=k \end{cases}$$

Risposta Il sistema è compatibile per $k \neq 2$. Per $k \neq 0, 2$ il sistema ammette una ed una sola soluzione, per $k = 0$ il sistema ammette ∞^1 soluzioni **(pt.4)**

Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$, si dica quale è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati ordinatamente dalle equazioni del sistema, al variare del parametro reale k.

Risposta Per $k \neq 0, 2$ i tre piani appartengono ad una stella propria di piani di centro $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ dove (x_0, y_0, z_0) è l'unica soluzione del sistema, per $k = 2$ i piani non hanno punti in comune (α e γ sono paralleli e distinti e β incide entrambi), per $k = 0$ i tre piani appartengono ad un fascio proprio (β incide $\alpha = \gamma$). **(pt.3)**

Posto $k = 0$ si determinino

- l'insieme S delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S = \{(2a+1, a, a) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

- il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(S)$.

  Risposta $\mathcal{L}(S)^{\perp} = \{(0, b, -b) \in \mathbb{R}^3 \mid b \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

Posto k =2, sia r la retta data dall'intersezione di α e β ed s la retta ottenuta intersecando β e γ. Si determini una rappresentazione cartesiana della superficie generata dalla rotazione della retta r attorno alla retta s.

Risposta $2x^2 + y^2 + z^2 + 2yz + 4x - 4y - 4z + 2 = 0$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}:\ 4x^2 + y^2 + 12x - 6y + 9 = 0$. Si riconosca la conica $\mathcal{C}$ e si determinino, se esistono e sono reali, centro (proprio o improprio), asintoti, assi e vertici di $\mathcal{C}$.

Risposta Ellisse, $C = \left(-\frac{3}{2}, 3\right)$, assi: $x = -3/2$, $y = 3$ vertici: $(0,3); (-3,3); \left(-\frac{3}{2}, 0\right); \left(-\frac{3}{2}, 6\right)$, non ha asintoti reali **(pt.5)**

ESERCIZIO 3. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & k & 1 \\ -4 & 1 & k \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale.

- Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k risulta diagonalizzabile.

  Risposta $k \neq 5$ **(pt.3)**

- Posto $k = 3$ si determinino una matrice diagonale D simile ad A_3 e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione $x^2 - y^2 + xy + xz - 2x + 5y - z - 8 = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$;

  Risposta Cono di vertice $V = (1, 3, -3)$ **(pt.2)**

- si determinino, se possibile, un'equazione di un piano che seziona la quadrica $\mathcal{Q}$ secondo una coppia di rette, motivando la risposta, e, in caso sia possibile, rappresentazioni cartesiane delle rette stesse.

  Risposta Qualunque piano passante per il vertice soddisfa la condizione richiesta. Sezionando con $x = 1$ si determina una conica riducibile in $r: x - 1 = y - 3 = 0$ contata due volte. **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 18.01.2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si dica per quali valori del parametro reale k il seguente sistema risulta compatibile e, in caso affermativo, si stabilisca il numero delle soluzioni

$$\begin{cases} x-(k-1)y-3z=0 \\ x+(k-2)z=0 \\ y+(k-1)z=k \end{cases}$$

Risposta Il sistema è compatibile per $k \neq 3$. Per $k \neq 0,3$ il sistema ammette una ed una sola soluzione, per $k=0$ il sistema ammette ∞^1 soluzioni **(pt.4)**

Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$, si dica quale è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati ordinatamente dalle equazioni del sistema, al variare del parametro reale k.

Risposta Per $k \neq 0,3$ i tre piani appartengono ad una stella propria di piani di centro $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ dove (x_0,y_0,z_0) è l'unica soluzione del sistema, per $k=3$ i piani non hanno punti in comune (sono a due a due incidenti secondo rette parallele e distinte), per $k=0$ i tre piani, distinti a due a due, appartengono ad un fascio proprio. **(pt.3)**

Posto $k=0$ si determinino

- l'insieme S delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S=\{(2a,a,a)\in\mathbb{R}^3 \mid a\in\mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

- il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(S)$.

  Risposta $\mathcal{L}(S)^\perp=\{(b+c,-2c,-2b)\in\mathbb{R}^3 \mid b,c\in\mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

Posto k =1, sia r la retta data dall'intersezione di α e γ ed s la retta ottenuta intersecando β e γ. Si determini una rappresentazione cartesiana della superficie generata dalla rotazione della retta r attorno alla retta s.

Risposta $3x^2+8y^2+3z^2-10xz-16y+8=0$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}:\ x^2+y^2-2xy-2x+6y+4=0$. Si riconosca la conica $\mathcal{C}$ e si determinino, se esistono e sono reali, centro (proprio o improprio), asintoti, assi e vertici di $\mathcal{C}$.

Risposta Parabola, $C_\infty=[(1,1,0)]$, asse: $x-y-2=0$, vertice: $V=(1,-1)$, non ci sono asintoti **(pt.5)**

ESERCIZIO 3. Si consideri la matrice

$$A_k=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 \\ -1 & 1 & k \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale.

- Si determini per quali valori di $k\in\mathbb{R}$ la matrice A_k risulta diagonalizzabile.

  Risposta $k \neq 2$ **(pt.3)**

- Posto $k=0$ si determinino una matrice diagonale D simile ad A_0 e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione $x^2-y^2+xy+xz+3x+2y-1=0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$;

  Risposta Cono di vertice $V=(0,1,-4)$ **(pt.2)**

- si determinino, se possibile, un'equazione di un piano che seziona la quadrica $\mathcal{Q}$ secondo una coppia di rette, motivando la risposta, e, in caso sia possibile, rappresentazioni cartesiane delle rette stesse.

  Risposta Qualunque piano passante per il vertice soddisfa la condizione richiesta. Sezionando con $x=0$ si determina una conica riducibile in $r: x=y-1=0$ contata due volte. **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 18.01.2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si dica per quali valori del parametro reale k il seguente sistema risulta compatibile e, in caso affermativo, si stabilisca il numero delle soluzioni

$$\begin{cases} x + (k-1)y - z = 1 \\ x + (k-2)z = 2 - k \\ y + (k-1)z = k \end{cases}$$

Risposta Il sistema è compatibile per $k \neq 0$. Per $k \neq 0, 1$ il sistema ammette una ed una sola soluzione, per $k = 1$ il sistema ammette ∞^1 soluzioni ______ **(pt.4)**

Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$, si dica quale è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati ordinatamente dalle equazioni del sistema, al variare del parametro reale k.

Risposta Per $k \neq 0, 1$ i tre piani appartengono ad una stella propria di piani di centro $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ dove (x_0, y_0, z_0) è l'unica soluzione del sistema, per $k = 0$ i piani non hanno punti in comune (sono a due a due incidenti secondo rette parallele e distinte), per $k = 1$ i tre piani appartengono ad un fascio proprio (γ incide $\alpha = \beta$). **(pt.3)**

Posto $k = 1$ si determinino

- l'insieme S delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S = \{(a, 1, a-1) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

- il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(S)$.

  Risposta $\mathcal{L}(S)^\perp = \{(b, -b, -b) \in \mathbb{R}^3 \mid b \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

Posto k =2, sia r la retta data dall'intersezione di α e γ ed s la retta ottenuta intersecando β e γ. Si determini una rappresentazione cartesiana della superficie generata dalla rotazione della retta r attorno alla retta s.

Risposta $2x^2 - y^2 - z^2 + 6yz - 8z + 2 = 0$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}:\ x^2 + 4y^2 - 6x = 0$. Si riconosca la conica $\mathcal{C}$ e si determinino, se esistono e sono reali, centro (proprio o improprio), asintoti, assi e vertici di $\mathcal{C}$.

Risposta Ellisse, $C = (3, 0)$, assi: $x = 3,\ y = 0$ vertici: $(0, 0); (6, 0); \left(3, \pm\frac{3}{2}\right)$, non ha asintoti reali **(pt.5)**

ESERCIZIO 3. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2k & 1 \\ 0 & 1 & 2k \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale.

- Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k risulta diagonalizzabile.

  Risposta $k \neq 3/2$ ______ **(pt.3)**

- Posto $k = 1/2$ si determinino una matrice diagonale D simile ad $A_{1/2}$ e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione $x^2 - y^2 + xy + xz + y - z - 2 = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$;

  Risposta Cono di vertice $V = (1, 1, -3)$ ______ **(pt.2)**

- si determinino, se possibile, un'equazione di un piano che seziona la quadrica $\mathcal{Q}$ secondo una coppia di rette, motivando la risposta, e, in caso sia possibile, rappresentazioni cartesiane delle rette stesse.

  Risposta Qualunque piano passante per il vertice soddisfa la condizione richiesta. Sezionando con $x = 1$ si determina una conica riducibile in $r : x - 1 = y - 1 = 0$ contata due volte. ______ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 18.01.2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si dica per quali valori del parametro reale k il seguente sistema risulta compatibile e, in caso affermativo, si stabilisca il numero delle soluzioni

$$\begin{cases} x + (k+2)z = 0 \\ (k+1)x + y = -k-2 \\ (k+2)x + z = k+3 \end{cases}$$

Risposta Il sistema è compatibile per $k \neq -1$. Per $k \neq -3, -1$ il sistema ammette una ed una sola soluzione, per $k = -3$ il sistema ammette ∞^1 soluzioni ______ **(pt.4)**
Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$, si dica quale è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati ordinatamente dalle equazioni del sistema, al variare del parametro reale k.
Risposta Per $k \neq -3, -1$ i tre piani appartengono ad una stella propria di piani di centro $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ dove (x_0, y_0, z_0) è l'unica soluzione del sistema, per $k = -1$ i piani non hanno punti in comune (α e γ sono paralleli e distinti e β incide entrambi), per $k = -3$ i tre piani appartengono ad un fascio proprio (β incide $\alpha = \gamma$). ______ **(pt.3)**
Posto $k = -3$ si determinino

- l'insieme S delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S = \{(a, 2a+1, a) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

- il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(S)$.

  Risposta $\mathcal{L}(S)^\perp = \{(b, 0, -b) \in \mathbb{R}^3 \mid b \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

Posto $k = -1$, sia r la retta data dall'intersezione di α e β ed s la retta ottenuta intersecando β e γ. Si determini una rappresentazione cartesiana della superficie generata dalla rotazione della retta r attorno alla retta s.
Risposta $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz - 4x + 4y - 4z + 2 = 0$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}: \ x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 6y = 0$. Si riconosca la conica $\mathcal{C}$ e si determinino, se esistono e sono reali, centro (proprio o improprio), asintoti, assi e vertici di $\mathcal{C}$.
Risposta Parabola, $C_\infty = [(1,1,0)]$, asse: $x - y - 2 = 0$, vertice: $V = (2, 0)$, non ci sono asintoti **(pt.5)**

ESERCIZIO 3. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 0 & 2k & 1 \\ 0 & 1 & 2k \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale.

- Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k risulta diagonalizzabile.

  Risposta $k \neq 2$ ______ **(pt.3)**

- Posto $k = 1$ si determinino una matrice diagonale D simile ad A_1 e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione $x^2 - y^2 + xy + xz - 2y - 2z - 4 = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$;

  Risposta Cono di vertice $V = (2, 0, -4)$ ______ **(pt.2)**

- si determinino, se possibile, un'equazione di un piano che seziona la quadrica $\mathcal{Q}$ secondo una coppia di rette, motivando la risposta, e, in caso sia possibile, rappresentazioni cartesiane delle rette stesse.

  Risposta Qualunque piano passante per il vertice soddisfa la condizione richiesta. Sezionando con $x = 2$ si determina una conica riducibile in $r: x - 2 = y = 0$ contata due volte. ______ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 18.01.2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si dica per quali valori del parametro reale k il seguente sistema risulta compatibile e, in caso affermativo, si stabilisca il numero delle soluzioni

$$\begin{cases} 3x - y + (k+2)z = 0 \\ (k+1)x + y = 0 \\ (k+2)x + z = k+3 \end{cases}$$

Risposta Il sistema è compatibile per $k \neq 0$. Per $k \neq -3, 0$ il sistema ammette una ed una sola soluzione, per $k = -3$ il sistema ammette ∞^1 soluzioni **(pt.4)**

Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$, si dica quale è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati ordinatamente dalle equazioni del sistema, al variare del parametro reale k.

Risposta Per $k \neq -3, 0$ i tre piani appartengono ad una stella propria di piani di centro $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ dove (x_0, y_0, z_0) è l'unica soluzione del sistema, per $k = 0$ i piani non hanno punti in comune (sono a due a due incidenti secondo rette parallele e distinte), per $k = -3$ i tre piani appartengono ad un fascio proprio (γ incide $\alpha = \beta$). **(pt.3)**

Posto $k = -3$ si determinino

- l'insieme S delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S = \{(a, 2a, a) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

- il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(S)$.

  Risposta $\mathcal{L}(S)^\perp = \{(2b, -b-c, 2c) \in \mathbb{R}^3 \mid b, c \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

Posto $k = -2$, sia r la retta data dall'intersezione di α e γ ed s la retta ottenuta intersecando β e γ. Si determini una rappresentazione cartesiana della superficie generata dalla rotazione della retta r attorno alla retta s.

Risposta $3x^2 + 3y^2 + 8z^2 - 10xy - 16z + 8 = 0$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}$: $4x^2 + y^2 + 6y = 0$. Si riconosca la conica $\mathcal{C}$ e si determinino, se esistono e sono reali, centro (proprio o improprio), asintoti, assi e vertici di $\mathcal{C}$.

Risposta Ellisse, $C = (0, -3)$, assi: $x = 0$, $y = -3$ vertici: $(0,0); (0,-6); \left(\pm\frac{3}{2}, -3\right)$, non ha asintoti reali **(pt.5)**

ESERCIZIO 3. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2k & 1 \\ 0 & 1 & 2k \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale.

- Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k risulta diagonalizzabile.

  Risposta $k \neq 0$ **(pt.3)**

- Posto $k = -1$ si determinino una matrice diagonale D simile ad A_{-1} e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione $x^2 - y^2 + xy + xz + 7x + 3y + z + 5 = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$;

  Risposta Cono di vertice $V = (-1, 1, -6)$ **(pt.2)**

- si determinino, se possibile, un'equazione di un piano che seziona la quadrica $\mathcal{Q}$ secondo una coppia di rette, motivando la risposta, e, in caso sia possibile, rappresentazioni cartesiane delle rette stesse.

  Risposta Qualunque piano passante per il vertice soddisfa la condizione richiesta. Sezionando con $x = -1$ si determina una conica riducibile in $r : x + 1 = y - 1 = 0$ contata due volte. **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 18.01.2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si dica per quali valori del parametro reale k il seguente sistema risulta compatibile e, in caso affermativo, si stabilisca il numero delle soluzioni

$$\begin{cases} x - y - (k+2)z = -1 \\ (k+1)x + y = -k - 1 \\ (k+2)x + z = k + 3 \end{cases}$$

Risposta Il sistema è compatibile per $k \neq -3$. Per $k \neq -3, -2$ il sistema ammette una ed una sola soluzione, per $k = -2$ il sistema ammette ∞^1 soluzioni **(pt.4)**

Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$, si dica quale è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati ordinatamente dalle equazioni del sistema, al variare del parametro reale k.

Risposta Per $k \neq -3, -2$ i tre piani appartengono ad una stella propria di piani di centro $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ dove (x_0, y_0, z_0) è l'unica soluzione del sistema, per $k = -3$ i piani non hanno punti in comune (sono a due a due incidenti secondo rette parallele e distinte), per $k = -2$ i tre piani appartengono ad un fascio proprio (γ incide $\alpha = \beta$). **(pt.3)**

Posto $k = -2$ si determinino

- l'insieme S delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S = \{(a-1, a, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

- il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(S)$.

  Risposta $\mathcal{L}(S)^\perp = \{(b, -b, b) \in \mathbb{R}^3 \mid b \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

Posto $k = -1$, sia r la retta data dall'intersezione di α e γ ed s la retta ottenuta intersecando β e γ. Si determini una rappresentazione cartesiana della superficie generata dalla rotazione della retta r attorno alla retta s.

Risposta $x^2 - 2y^2 + z^2 - 6xz + 8x - 2 = 0$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}: \ x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 2y - 4 = 0$. Si riconosca la conica $\mathcal{C}$ e si determinino, se esistono e sono reali, centro (proprio o improprio), asintoti, assi e vertici di $\mathcal{C}$.

Risposta Parabola, $C_\infty = [(1,1,0)]$, asse: $x - y = 0$, vertice: $V = (1,1)$, non ci sono asintoti **(pt.5)**

ESERCIZIO 3. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 0 & 2k & 1 \\ 0 & 1 & 2k \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale.

- Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k risulta diagonalizzabile.

  Risposta $k \neq 5/2$ **(pt.3)**

- Posto $k = 3/2$ si determinino una matrice diagonale D simile ad $A_{3/2}$ e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione $x^2 - y^2 + xy + xz - x - y - z = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$;

  Risposta Cono di vertice $V = (1, 0, -1)$ **(pt.2)**

- si determinino, se possibile, un'equazione di un piano che seziona la quadrica $\mathcal{Q}$ secondo una coppia di rette, motivando la risposta, e, in caso sia possibile, rappresentazioni cartesiane delle rette stesse.

  Risposta Qualunque piano passante per il vertice soddisfa la condizione richiesta. Sezionando con $x = 1$ si determina una conica riducibile in $r: x - 1 = y = 0$ contata due volte. **(pt.2)**