UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 5^o appello - 1/9/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x+y+kz+(k-1)t=0 \\ x+(k+1)y-t=k \end{cases}$$

Se ne discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità, precisando il numero di soluzioni quando risulta compatibile.

Risposta Il sistema è compatibile per ogni k. Per $k \neq 0$ il sistema ammette ∞^2 soluzioni. Per $k = 0$ il sistema ammette ∞^3 soluzioni ______ **(pt.3)**

Posto $k = 0$ si stabilisca la dimensione e una base dello spazio delle soluzioni.

Risposta $\dim S_0 = 3$, $B = ((0,0,1,0),(1,0,0,1),(0,1,0,1))$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ si stabilisca se il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un autovettore di A; in caso affermativo, si determini il relativo autovalore e l'autospazio al quale appartiene.

Risposta Sì, autovalore 5 autospazio $V_5 = \{(0,y,0,0) \in \mathbb{R}^4 \mid y \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $A_3(\mathbb{R})$ si determinino delle equazioni cartesiane dei piani paralleli che contengono rispettivamente le rette $r : \begin{cases} x+2=0 \\ y=0 \end{cases}$ ed $s : \begin{cases} 3x-y+z+2=0 \\ -x+2y+z=0 \end{cases}$.

Risposta $\alpha_r : \ 4x-3y+8=0 \quad \alpha_s : \ 4x-3y+2=0$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si determini per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la conica $\mathcal{C} : x^2+y^2+xy+\alpha x+\beta y+1=0$ ha:

- centro nel punto $C = (1,1)$;

  Risposta $\alpha = \beta = -3$ ______ **(pt.3)**

- $P = (1,1)$ e la retta $p : x+y+\frac{2}{3}=0$ come coppia polo-polare.

  Risposta $\alpha = 0, \beta = 0$ ______ **(pt.3)**

Posto $\alpha = 3$ e $\beta = 0$ si riconosca la conica $\mathcal{C}$ e se ne determinino gli assi.

Risposta Ellisse; $x-y+3=0, \quad x+y+1=0$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si consideri il sottospazio vettoriale $U = \mathcal{L}((0,1,-1,1),(2,1,0,0),(2,2,-1,1))$. Si determini:

- una base ortogonale di U;

  Risposta $B = ((0,1,-1,1),(6,2,1,-1))$ ______ **(pt.2)**

- il complemento ortogonale di U.

  Risposta $U^\perp = \mathcal{L}((1,-2,-2,0),(0,0,1,1))$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} : \ (y-1)^2+(z-1)^2-x=0$.

Risposta $\mathcal{Q}$ è un paraboloide ellittico ______ **(pt.3)**

Si riconoscano le sezioni di $\mathcal{Q}$ con i piani $\alpha : y=0$ e $\beta : \ x=0$ precisando, qualora la sezione sia riducibile, delle equazioni delle rette componenti.

Risposta $\mathcal{Q} \cap \alpha$ parabola; $\quad \mathcal{Q} \cap \beta$ riducibile in $\begin{cases} y-1+i(z-1)=0 \\ x=0 \end{cases} \cup \begin{cases} y-1-i(z-1)=0 \\ x=0 \end{cases}$. ______ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 5^o appello - 1/9/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} kx + z + (3-k)t = k-2 \\ 2x + (2-k)y + z + t = 0 \end{cases}$$

Se ne discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità, precisando il numero di soluzioni quando risulta compatibile.
Risposta Il sistema è compatibile per ogni k. Per $k \neq 2$ il sistema ammette ∞^2 soluzioni. Per $k = 2$ il sistema ammette ∞^3 soluzioni **(pt.3)**

Posto $k = 2$ si stabilisca la dimensione e una base dello spazio delle soluzioni.
Risposta $\dim S_2 = 3$, $B = ((0,1,0,0),(1,0,0,-2),(0,0,1,-1))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ si stabilisca se il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un autovettore di A; in caso affermativo, si determini il relativo autovalore e l'autospazio al quale appartiene.
Risposta Sì, autovalore 4 autospazio $V_4 = \{(0,0,z,0) \in \mathbb{R}^4 \mid z \in \mathbb{R}\}$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $A_3(\mathbb{R})$ si determinino delle equazioni cartesiane dei piani paralleli che contengono rispettivamente le rette $r : \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ z + 3 = 0 \end{cases}$ ed $s : \begin{cases} 3x + 6y + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.
Risposta $\alpha_r : \ x + 2y - 6 = 0 \quad \alpha_s : \ 3x + 6y + 1 = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si determini per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la conica $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + \alpha xy + x + \beta y + 1 = 0$ ha:

- centro nel punto $C = (1,1)$;

  Risposta $\alpha = -3, \beta = 1$ **(pt.3)**

- $P = (1,1)$ e la retta $p : 3x + 2y + 3 = 0$ come coppia polo-polare.

  Risposta $\alpha = 0, \beta = 0$ **(pt.3)**

Posto $\alpha = 1$ e $\beta = 5$ si riconosca la conica $\mathcal{C}$ e se ne determinino gli assi.
Risposta Ellisse; $x - y - 4 = 0$, $x + y + 2 = 0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si consideri il sottospazio vettoriale $U = \mathcal{L}((1,2,-1,0),(0,0,2,1),(1,2,1,1))$. Si determini:

- una base ortogonale di U;

  Risposta $B = ((1,2,-1,0),(1,2,5,3))$ **(pt.2)**

- il complemento ortogonale di U.

  Risposta $U^\perp = \mathcal{L}((1,0,1,-2),(-2,1,0,0))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} : \ (x-y)^2 - 2z^2 + 2x + 2y - 1 = 0$.
Risposta $\mathcal{Q}$ è un paraboloide iperbolico **(pt.3)**

Si riconoscano le sezioni di $\mathcal{Q}$ con i piani $\alpha : 2x + 2y - 1 = 0$ e $\beta : \ z = 0$ precisando, qualora la sezione sia riducibile, delle equazioni delle rette componenti.

Risposta $\mathcal{Q} \cap \alpha$ riducibile in $\begin{cases} x - y + \sqrt{2}z = 0 \\ 2x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x - y - \sqrt{2}z = 0 \\ 2x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$; $\mathcal{Q} \cap \beta$ parabola. **(pt.3)**