UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 4^o appello - 08/06/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x+y+z-t=0 \\ hx+y+z-t=0 \\ x+hy=0 \end{cases}$$

si determini, al variare di $h \in \mathbb{R}$, la dimensione dello spazio $V_h \subseteq \mathbb{R}^4$ i cui vettori sono le soluzioni del sistema.

Risposta per $h \neq 0,1$, $\dim V_h = 1$, per $h = 0,1$ $\dim V_h = 2$. **(pt.2)**

Inoltre si stabilisca per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ risulta $\mathbb{R}^4 = V_h \oplus U$ dove $U = \{(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \mid 2\alpha-\beta+\gamma=0,\ \beta-\gamma=0\}$.

Risposta per $h = 1$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ si stabilisca se il vettore $v = (2,1,1,9)$ è un autovettore di A e, in tal caso, il relativo autovalore.

Risposta sì, $\lambda = 3$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. Data la matrice reale $A_k = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ A_k è diagonalizzabile.

Risposta $\forall k > -1$ **(pt.4)**

Per quali lo è ortogonalmente?

Risposta per $k = 1$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k:\ x^2+2kxy+y^2-1=0$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ è riducibile, e per tali valori si determinino le rette componenti;
  Risposta $k=1$ $x+y+1=0,\ x+y-1=0$; $k=-1$ $x-y+1=0,\ x-y-1=0$ **(pt.2)**
- si determini, al variare di $k \in \mathbb{R}$ il luogo descritto dai centri delle coniche $\mathcal{C}_k$;
  Risposta $C = (0,0)$ **(pt.2)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la retta $r:\ x+2y-1=0$ è la polare del puno $P = (1,0,1)$;
  Risposta $k = 2$ **(pt.2)**
- posto $k = 2$ si riconosca la conica $\mathcal{C}_2$ e si determinino i suoi punti impropri.
  Risposta Iperbole, $P_\infty, Q_\infty = [(-2 \pm \sqrt{3}, 1, 0)]$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determini la retta congiungente i punti $P_\infty = [(1,3,1,0)]$ e $Q = [(0,2,3,1)]$.

Risposta $x-z+3=0=3x-y+2$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}_k:\ kx^2+2xy+kz^2-2z+k=0$, dove $k \in \mathbb{R}$.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{Q}_k$ è un cono e per tali valori si determinino le coordinate del vertice;
  Risposta $k=-1$, $V=(0,0,-1)$; $k=1$, $V=(0,0,1)$ **(pt.3)**
- posto $k = 0$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}_0$.
  Risposta paraboloide iperbolico **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 4^o appello - 08/06/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x+y+2z-2t=0 \\ x+(h-1)y=0 \\ (h-1)x+y+2z-2t=0 \end{cases}$$

si determini, al variare di $h \in \mathbb{R}$, la dimensione dello spazio $V_h \subseteq \mathbb{R}^4$ i cui vettori sono le soluzioni del sistema.

Risposta per $h \neq 1, 2$, $\dim V_h = 1$, per $h = 1, 2$, $\dim V_h = 2$ **(pt.2)**

Inoltre si stabilisca per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ risulta $\mathbb{R}^4 = V_h \oplus U$ dove $U = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \mid 4\alpha - 2\beta - \delta = 0,\ 2\beta + \delta = 0\}$.

Risposta per $h = 2$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ si stabilisca se il vettore $v = (1, 7, 3, 1)$ è un autovettore di A e, in tal caso, il relativo autovalore.

Risposta Sì, $\lambda = 4$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. Data la matrice reale $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & k & 0 \end{pmatrix}$, si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ A_k è diagonalizzabile.

Risposta $\forall k > -1/2$ **(pt.4)**

Per quali lo è ortogonalmente?

Risposta $k = 2$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k:\ x^2 - 2kxy + y^2 - 2 = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ è riducibile, e per tali valori si determinino le rette componenti;
  Risposta $k = 1$ $\quad x - y + \sqrt{2} = 0,\ x - y - \sqrt{2} = 0;$ $\qquad k = -1$ $\quad x + y + \sqrt{2} = 0,\ x + y - \sqrt{2} = 0$ **(pt.2)**
- si determini, al variare di $k \in \mathbb{R}$ il luogo descritto dai centri delle coniche $\mathcal{C}_k$;
  Risposta $C = (0, 0)$ **(pt.2)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la retta $r:\ 2x - y + 2 = 0$ è la polare del puno $P = (0, 1, 1)$;
  Risposta $k = 2$ **(pt.2)**
- posto $k = 2$ si riconosca la conica $\mathcal{C}_2$ e si determinino i suoi punti impropri.
  Risposta Iperbole, $\quad P_\infty, Q_\infty = [(2 \pm \sqrt{3}, 1, 0)]$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determini la retta congiungente i punti $P_\infty = [(1, 2, 1, 0)]$ e $Q = [(3, 1, 0, 1)]$.

Risposta $x - z - 3 = 0 = 2x - y - 5$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}_k:\ kx^2 + 2xz + ky^2 - 2y + k = 0$, dove $k \in \mathbb{R}$.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{Q}_k$ è un cono e per tali valori si determinino le coordinate del vertice;
  Risposta $k = -1, \quad V = (0, -1, 0); \qquad k = 1, \quad V = (0, 1, 0)$ **(pt.3)**
- posto $k = 0$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}_0$.
  Risposta paraboloide iperbolico **(pt.2)**