

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 3° appello - 30/03/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 2 \\ 2 & k-1 & k+1 & 4 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k-3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile;

Risposta Il sistema è compatibile per $k \neq 1$, e in tal caso ammette ∞^2 soluzioni _____ (pt.3)

- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$, per cui l'insieme S delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^4 , motivando la risposta;

Risposta $k = 3$ perché in tal caso il sistema è omogeneo _____ (pt.2)

- Posto $k = 0$ si determini l'insieme S_0 delle soluzioni di $A_0 X = B_0$ e, se possibile, una sua base; in caso non sia possibile si motivi la risposta.

Risposta $S = \{(-2\beta, \alpha + 3, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, non è possibile determinarne una base perché S non è un sottospazio _____ (pt.3)

ESERCIZIO 2. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & k+1 \\ 0 & 3 & k \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui le due matrici A_k e D risultano simili;

Risposta $k = 2$ _____ (pt.2)

- per ciascuno dei valori di k precedentemente trovati si determini una matrice P tale che $D = P^{-1} A_k P$.

Risposta $P = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 3. In \mathbb{R}^4 si considerino i sottospazi $U_k = \mathcal{L}((k, 0, 0, 1), (2k, 0, k - 2, k))$ e $W = \mathcal{L}((1, 0, 1, 0), (2, 1, 0, 0))$, dove k è un parametro reale.

- Si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione di U_k ;

Risposta Se $k \neq 2$ $\dim U_k = 2$, se $k = 2$ $\dim U_2 = 1$ _____ (pt.2)

- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la somma $U_k + W$ è diretta.

Risposta $k \neq -1$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 4. In $E_3(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r_k : x + z - k - 1 = 0 = ky + 3z$ e $s_k : y = 0 = 2kx + 7y - z - 4$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali r_k ed s_k risultano sghembe.

Risposta $k \neq -2, 1$ _____ (pt.2)

Posto $k = 1$ si determini, se possibile:

- un'equazione cartesiana del piano contenente sia r_1 che s_1 ;

Risposta $2x - y - z - 4 = 0$ _____ (pt.2)

- un'equazione cartesiana della retta passante per $P = (2, 0, -1)$ e ortogonale sia a r_1 che a s_1 .

Risposta $x + 2y - 2 = 0 = y - z - 1$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 5. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 2xy - 4y = 0$.

- Si riconosca la conica \mathcal{C} e si determinino, se esistono e sono reali, centro, assi, asintoti e vertici;

Risposta Parabola; $C_\infty = [(1, -1, 0)]$, asse: $x + y - 1 = 0$, vertice: $V = (3/4, 1/4)$ _____ (pt.3)

- si determinino delle equazioni cartesiane delle tangenti a \mathcal{C} condotte dal punto $P = (1, 0)$;

Risposta $t_1 : y = 0$, $t_2 : x - 1 = 0$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 6. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}_k : (k+1)x^2 + ky^2 - 5z^2 + 4x - 10z + k - 1 = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la quadrica \mathcal{Q}_k è riducibile;

Risposta $k = 0$ _____ (pt.1)

- posto $k = -5$ si determini il luogo dei punti doppi della quadrica \mathcal{Q}_{-5} .

Risposta $\{V = (1/2, 0, -1)\}$ _____ (pt.2)

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 3° appello - 30/03/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 & 5k \\ 2 & k-2 & k^2 & 4 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k+5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile;

Risposta Il sistema è compatibile per $k \neq 2$, e in tal caso ammette ∞^2 soluzioni _____ (pt.3)

- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$, per cui l'insieme S delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^4 , motivando la risposta;

Risposta $k = -5$ perché in tal caso il sistema è omogeneo _____ (pt.2)

- Posto $k = 0$ si determini l'insieme S_0 delle soluzioni di $A_0 X = B_0$ e, se possibile, una sua base; in caso non sia possibile si motivi la risposta.

Risposta $S = \{(-2\alpha + 1, 2\beta - 2\alpha + 1, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, non è possibile determinarne una base perché S non è un sottospazio _____ (pt.3)

ESERCIZIO 2. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 3 & 0 & k+1 \\ 0 & 2 & k \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui le due matrici A_k e D risultano simili;

Risposta $k = 0$ _____ (pt.2)

- per ciascuno dei valori di k precedentemente trovati si determini una matrice P tale che $D = P^{-1} A_k P$.

Risposta $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 3. In \mathbb{R}^4 si considerino i sottospazi $U_k = \mathcal{L}((4k, 0, k-4, k), (k, 0, 0, 1))$ e $W = \mathcal{L}((1, 0, -1, 0), (0, 1, 2, 0))$, dove k è un parametro reale.

- Si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione di U_k ;

Risposta Se $k \neq 4$ $\dim U_k = 2$, se $k = 4$ $\dim U_4 = 1$ _____ (pt.2)

- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la somma $U_k + W$ è diretta.

Risposta $k \neq 1$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 4. In $E_3(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r_k : 3kx + y + 18 = 0 = z$ e $s_k : 2y + kz = 0 = x - y + k + 1$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali r_k ed s_k risultano sghembe.

Risposta $k \neq -3, 2$ _____ (pt.2)

Posto $k = 2$ si determini, se possibile:

- un'equazione cartesiana del piano contenente sia r_2 che s_2 ;

Risposta $6x + y + 7z + 18 = 0$ _____ (pt.2)

- un'equazione cartesiana della retta passante per $P = (3, 0, 1)$ e ortogonale sia a r_2 che a s_2 .

Risposta $x - 6y - 3 = 0 = 7y - z + 1$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 5. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 2xy - 6x = 0$.

- Si riconosca la conica \mathcal{C} e si determinino, se esistono e sono reali, centro, assi, asintoti e vertici;

Risposta Parabola; $C_\infty = [(1, -1, 0)]$, asse: $2x + 2y - 3 = 0$, vertice: $V = (3/8, 9/8)$ _____ (pt.3)

- si determinino delle equazioni cartesiane delle tangenti a \mathcal{C} condotte dal punto $P = (0, 1)$;

Risposta $t_1 : x = 0$, $t_2 : x - 2y + 2 = 0$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 6. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}_k : k^2 x^2 + 3y^2 + (k+1)z^2 + 2x + 1 = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la quadrica \mathcal{Q}_k è riducibile;

Risposta $k = -1$ _____ (pt.1)

- posto $k = 1$ si determini il luogo dei punti doppi della quadrica \mathcal{Q}_1 .

Risposta $\{V = (-1, 0, 0)\}$ _____ (pt.2)

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 3° appello - 30/03/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 3 \\ 2 & k-1 & k+1 & 6 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k+3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile;

Risposta Il sistema è compatibile per $k \neq -1$, e in tal caso ammette ∞^2 soluzioni _____ (pt.3)

- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$, per cui l'insieme S delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^4 , motivando la risposta;

Risposta $k = -3$ perché in tal caso il sistema è omogeneo _____ (pt.2)

- Posto $k = 0$ si determini l'insieme S_0 delle soluzioni di $A_0 X = B_0$ e, se possibile, una sua base; in caso non sia possibile si motivi la risposta.

Risposta $S = \{(-3\beta + 3, \alpha, \alpha - 6, \beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, non è possibile determinarne una base perché S non è un sottospazio _____ (pt.3)

ESERCIZIO 2. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k+2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & k & 5 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui le due matrici A_k e D risultano simili;

Risposta $k = -2$ _____ (pt.2)

- per ciascuno dei valori di k precedentemente trovati si determini una matrice P tale che $D = P^{-1} A_k P$.

Risposta $P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 3. In \mathbb{R}^4 si considerino i sottospazi $U_k = \mathcal{L}((0, 3k, k, k-3), (0, k, 1, 0))$ e $W = \mathcal{L}((0, 1, 0, 1), (3, 2, 0, 1))$, dove k è un parametro reale.

- Si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione di U_k ;

Risposta Se $k \neq 3$ $\dim U_k = 2$, se $k = 3$ $\dim U_3 = 1$ _____ (pt.2)

- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la somma $U_k + W$ è diretta.

Risposta $k \neq -1$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 4. In $E_3(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r_k : x = 0 = 2y + kz + 8$ e $s_k : 4kx + y = 0 = x + z + k + 2$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali r_k ed s_k risultano sghembe.

Risposta $k \neq -4, 2$ _____ (pt.2)

Posto $k = 2$ si determini, se possibile:

- un'equazione cartesiana del piano contenente sia r_2 che s_2 ;

Risposta $9x + y + z + 4 = 0$ _____ (pt.2)

- un'equazione cartesiana della retta passante per $P = (0, 1, 3)$ e ortogonale sia a r_2 che a s_2 .

Risposta $x - 9y + 9 = 0 = y - z + 2$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 5. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C} : x^2 + 4x - 2y + 1 = 0$.

- Si riconosca la conica \mathcal{C} e si determinino, se esistono e sono reali, centro, assi, asintoti e vertici;

Risposta Parabola; $C_\infty = [(0, 1, 0)]$, asse: $x + 2 = 0$, vertice: $V = (-2, -3/2)$ _____ (pt.3)

- si determinino delle equazioni cartesiane delle tangenti a \mathcal{C} condotte dal punto $P = (1, 1)$;

Risposta $t_1 : 5x - y - 4 = 0$, $t_2 : x - y = 0$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 6. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}_k : (k+2)x^2 + (k+3)y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + k + 1 = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la quadrica \mathcal{Q}_k è riducibile;

Risposta $k = -1$ _____ (pt.1)

- posto $k = -3$ si determini il luogo dei punti doppi della quadrica \mathcal{Q}_{-3} .

Risposta $\{V = [(1, 1, -1, 0)]\}$ _____ (pt.2)

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 3° appello - 30/03/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k & -1 & 0 & 2 \\ 2k+1 & -3 & 1-k & 6 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 2-k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile;

Risposta Il sistema è compatibile per $k \neq 1$, e in tal caso ammette ∞^2 soluzioni _____ (pt.3)

- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$, per cui l'insieme S delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^4 , motivando la risposta;

Risposta $k = 2$ perché in tal caso il sistema è omogeneo _____ (pt.2)

- Posto $k = 0$ si determini l'insieme S_0 delle soluzioni di $A_0 X = B_0$ e, se possibile, una sua base; in caso non sia possibile si motivi la risposta.

Risposta $S = \{(\alpha, 2\beta, -\alpha + 2, \beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, non è possibile determinarne una base perché S non è un sottospazio _____ (pt.3)

ESERCIZIO 2. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ k-2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui le due matrici A_k e D risultano simili;

Risposta $k = 4$ _____ (pt.2)

- per ciascuno dei valori di k precedentemente trovati si determini una matrice P tale che $D = P^{-1} A_k P$.

Risposta $P = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -8 & 1 \end{pmatrix}$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 3. In \mathbb{R}^4 si considerino i sottospazi $U_k = \mathcal{L}((1, 0, 0, k), (k, k-5, 0, 5k))$ e $W = \mathcal{L}((0, 1, 0, 1), (0, 1, 2, 0))$, dove k è un parametro reale.

- Si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione di U_k ;

Risposta Se $k \neq 5$ $\dim U_k = 2$, se $k = 5$ $\dim U_5 = 1$ _____ (pt.2)

- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la somma $U_k + W$ è diretta.

Risposta $k \neq -1$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 4. In $E_3(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r_k : 3x + 2ky - z - 4 = 0 = x$ e $s_k : kx + 3z = 0 = y + z - k - 1$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali r_k ed s_k risultano sghembe.

Risposta $k \neq -2, 1$ _____ (pt.2)

Posto $k = 1$ si determini, se possibile:

- un'equazione cartesiana del piano contenente sia r_1 che s_1 ;

Risposta $x - 2y + z + 4 = 0$ _____ (pt.2)

- un'equazione cartesiana della retta passante per $P = (0, 1, 0)$ e ortogonale sia a r_1 che a s_1 .

Risposta $2x + y - 1 = 0 = x - z$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 5. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C} : 3y^2 + 2x + 12y + 3 = 0$.

- Si riconosca la conica \mathcal{C} e si determinino, se esistono e sono reali, centro, assi, asintoti e vertici;

Risposta Parabola; $C_\infty = [(1, 0, 0)]$, asse: $y + 2 = 0$, vertice: $V = (9/2, -2)$ _____ (pt.3)

- si determinino delle equazioni cartesiane delle tangenti a \mathcal{C} condotte dal punto $P = (12, 0)$;

Risposta $t_1 : x + 15y - 12 = 0$, $t_2 : x - 3y - 12 = 0$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 6. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}_k : kx^2 + (k+4)y^2 + 6z^2 + 4x + k + 3 = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la quadrica \mathcal{Q}_k è riducibile;

Risposta $k = -4$ _____ (pt.1)

- posto $k = 1$ si determini il luogo dei punti doppi della quadrica \mathcal{Q}_1 .

Risposta $\{V = (-2, 0, 0)\}$ _____ (pt.2)