UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 5^o appello - 6/9/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -k \\ 0 & 2k-1 & -2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k-1 \\ 0 \\ k-1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni quando il sistema risulta compatibile;
  Risposta Compatibile per $k = \pm 1$; $k = 1$ ∞^1 soluz, $k = -1$ soluz. unica **(pt.3)**
- si determinino, motivando la risposta, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui l'insieme delle soluzioni è un sottospazio vettoriale;
  Risposta $k = 1$ perché il sistema risulta omogeneo **(pt.1)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$, se esistono, per cui $(-1, 2, -3)$ risulta essere una soluzione del sistema;
  Risposta $k = -1$ **(pt.2)**
- posto $k = 1$ si determini un complemento diretto dell'insieme delle soluzioni di $A_1 X = B_1$.
  Risposta $\mathcal{L}((1,0,0),(0,1,0))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & k & -1 \end{pmatrix}$.

- Si determinino gli autovalori della matrice A_k;
  Risposta $1, -1, k$ **(pt.1)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui tutti gli autovalori di A_k sono distinti;
  Risposta $k \neq \pm 1$ **(pt.1)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k è diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq \pm 1$ **(pt.2)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{v} = (12, 3, 2)$ è un autovettore di A_k e il corrispondente autovalore.
  Risposta $k = 2$, $\lambda = 2$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino le coniche $\mathcal{C}_k : \ (k+1)x^2 - y^2 + 2xy + 2x - 1 = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ è riducibile e si classifichino, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le coniche generali;
  Risposta Riducibile per $k = -3$; $k < -2$ e $k \neq -3$ ellisse, $k = -2$ parabola, $k > -2$ iperbole **(pt.3)**
- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$, se esistono, per cui la conica $\mathcal{C}_k$ ammette come centro un punto improprio;
  Risposta $k = -2$ **(pt.2)**
- posto $k = 0$ si determinino, se esistono e sono reali, centro e asintoti della conica $\mathcal{C}_0$.
  Risposta $C = (-1/2, -1/2)$, $x + (1 \pm \sqrt{2})y + 1 \pm \sqrt{2}/2 = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino le rette $r_k : x = 0 = 2x + y - kz - 1$ e $s_k : kx + y + 1 = 0 = x + z - 1 + k$, dove k è un parametro reale.

- Si determini, al variare di $k \in \mathbb{R}$ la mutua posizione delle due rette;
  Risposta $k \neq -1, 2$ sghembe, $k = -1$ incidenti in $(0, -1, 2)$, $k = 2$ incidenti in $(0, -1, -1)$ **(pt.3)**
- posto $k = 1$ si determinino delle equazioni cartesiane dei piani paralleli che contengono r_1 ed s_1;
  Risposta $y - z - 1 = 0$, $y - z + 1 = 0$ **(pt.2)**
- posto $k = 1$ si determinino delle equazioni cartesiane della retta di minima distanza tra r_1 ed s_1, e il valore di tale distanza;
  Risposta $x = 0 = y + z + 1$, $d = \sqrt{2}$ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 5^o appello - 6/9/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-k \\ 0 & k-1 & 1 \\ 2k-3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k-2 \\ k-2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni quando il sistema risulta compatibile;
  Risposta Compatibile per $k = 0, 2$; $k = 2$ ∞^1 soluz, $k = 0$ soluz. unica **(pt.3)**
- si determinino, motivando la risposta, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui l'insieme delle soluzioni è un sottospazio vettoriale;
  Risposta $k = 2$ perché il sistema risulta omogeneo **(pt.1)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$, se esistono, per cui $(2, -1, -3)$ risulta essere una soluzione del sistema;
  Risposta $k = 0$ **(pt.2)**
- posto $k = 2$ si determini un complemento diretto dell'insieme delle soluzioni di $A_2X = B_2$.
  Risposta $\mathcal{L}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & k & k \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

- Si determinino gli autovalori della matrice A_k;
  Risposta $-3, 2, k$ **(pt.1)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui tutti gli autovalori di A_k sono distinti;
  Risposta $k \neq -3, 2$ **(pt.1)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k è diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq -3, 2$ **(pt.2)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{v} = (0, 2, 4)$ è un autovettore di A_k e il corrispondente autovalore.
  Risposta $k = -1$, $\lambda = -3$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino le coniche $\mathcal{C}_k :\ x^2 + (k-1)y^2 + 2xy + 2y - 2 = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ è riducibile e si classifichino, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le coniche generali;
  Risposta Riducibile per $k = 3/2$; $k < 2$ e $k \neq 3/2$ iperbole, $k = 2$ parabola, $k > 2$ ellisse **(pt.3)**
- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$, se esistono, per cui la conica $\mathcal{C}_k$ ammette come centro un punto improprio;
  Risposta $k = 2$ **(pt.2)**
- posto $k = 0$ si determinino, se esistono e sono reali, centro e asintoti della conica $\mathcal{C}_0$.
  Risposta $C = (-1/2, 1/2)$, $x + (1 \pm \sqrt{2})y \mp \sqrt{2}/2 = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino le rette $r_k : y = 0 = x + 2y + kz - 2$ e $s_k : x - ky = 0 = y + z - 1 - k$, dove k è un parametro reale.

- Si determini, al variare di $k \in \mathbb{R}$ la mutua posizione delle due rette;
  Risposta $k \neq -2, 1$ sghembe, $k = -2$ incidenti in $(0, 0, -1)$, $k = 1$ incidenti in $(0, 0, 2)$ **(pt.3)**
- posto $k = -1$ si determinino delle equazioni cartesiane dei piani paralleli che contengono r_{-1} ed s_{-1};
  Risposta $x - z - 2 = 0$, $x - z = 0$ **(pt.2)**
- posto $k = -1$ si determinino delle equazioni cartesiane della retta di minima distanza tra r_{-1} ed s_{-1}, e il valore di tale distanza;
  Risposta $y = 0 = x + z$, $d = \sqrt{2}$ **(pt.3)**