UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 4^o appello - 21/06/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k-1 & 0 & -1 \\ 0 & k & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k+1 \\ 0 \\ k+1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni quando il sistema risulta compatibile;

  Risposta Esistono soluzioni $\forall k \in \mathbb{R}$; $k \neq 2$ soluz. unica, $k = 2$ ∞^1 soluz. **(pt.3)**

- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$, se esistono, per cui la matrice $M = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ risulta essere l'inversa della matrice A_k;

  Risposta $k = 1$ **(pt.2)**

- posto $k = 1$ si determini il complemento ortogonale, rispetto al prodotto scalare euclideo, dell'insieme delle soluzioni di $A_1 X = B_1$.

  Risposta $\mathcal{L}((1,1,0),(0,1,1))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & k+1 \\ -2 & k+1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Si determinino gli autovalori della matrice A_k;

  Risposta $1, k+1, -k-1$ **(pt.2)**

- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui tutti gli autovalori di A_k sono distinti;

  Risposta $k \neq -2, -1, 0$ **(pt.1)**

- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq -2$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino la retta $a:\ x+y-1 = 0 = x-2y+z$ e il punto $P = (2, 0, -1)$. Si determini una rappresentazione cartesiana del luogo descritto dal punto P nella rotazione di asse a.

Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0 = x - y - 3z - 5$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino le coniche $\mathcal{C}_k:\ kx^2 + ky^2 + 4xy + 2(k+2)y + 1 = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ è riducibile e si classifichino, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le coniche generali;

  Risposta $k = -2$ riducibile, $k = 2$ parabola, $k < -2 \vee k > 2$ ellisse, $-2 < k < 2$ iperbole **(pt.3)**

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$, se esistono, per cui la conica $\mathcal{C}_k$ si spezza nell'unione di due rette parallele, precisando le equazioni delle rette componenti;

  Risposta $k = -2$, $\sqrt{2}x - \sqrt{2}y \pm 1 = 0$ **(pt.2)**

- posto $k = 2$ si determinino le coordinate degli eventuali vertici della conica $\mathcal{C}_2$.

  Risposta $V = (-5/8, -3/8)$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino la sfera $\Sigma:\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 7 = 0$ e il piano $\pi:\ x + 2y + z + 6 = 0$. Si determinino:

- centro e raggio della sfera Σ;

  Risposta $C = (1, 0, -1)$, $R = 3$ **(pt.1)**

- centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C} = \Sigma \cap \pi$;

  Risposta $C' = (0, -2, -2)$, $R' = \sqrt{3}$ **(pt.2)**

- equazioni cartesiane dei piani paralleli a π e tangenti a Σ;

  Risposta $x + 2y + z \pm 3\sqrt{6} = 0$ **(pt.2)**

- un'equazione cartesiana della sfera avente il medesimo centro di Σ e tangente a π;

  Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 4 = 0$ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 4^o appello - 21/06/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & k \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & k+1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k+2 \\ k+2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni quando il sistema risulta compatibile;
  Risposta Esistono soluzioni $\forall k \in \mathbb{R}$; $k \neq 1$ soluz. unica, $k = 1$ ∞^1 soluz. **(pt.3)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$, se esistono, per cui la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ risulta essere l'inversa della matrice A_k;
  Risposta $k = 0$ **(pt.2)**
- posto $k = 0$ si determini il complemento ortogonale, rispetto al prodotto scalare euclideo, dell'insieme delle soluzioni di $A_0X = B_0$.
  Risposta $\mathcal{L}((1,1,0),(0,1,1))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & k \\ 2 & k & 1 \end{pmatrix}$.

- Si determinino gli autovalori della matrice A_k;
  Risposta $3, 1-k, 1+k$ **(pt.2)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui tutti gli autovalori di A_k sono distinti;
  Risposta $k \neq 0, \pm 2$ **(pt.1)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k è diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq \pm 2$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino la retta $a:\ x+z = 0 = x+y-2z-1$ e il punto $P = (1,1,0)$. Si determini una rappresentazione cartesiana del luogo descritto dal punto P nella rotazione di asse a.
Risposta $x^2+y^2+z^2-2y = 0 = x-3y-z+2$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino le coniche $\mathcal{C}_k:\ (k-1)x^2+(k-1)y^2+4xy+2(k+1)x+1 = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ è riducibile e si classifichino, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le coniche generali;
  Risposta $k = -1$ riducibile, $k = 3$ parabola, $k < -1 \vee k > 3$ ellisse, $-1 < k < 3$ iperbole **(pt.3)**
- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$, se esistono, per cui la conica $\mathcal{C}_k$ si spezza nell'unione di due rette parallele, precisando le equazioni delle rette componenti;
  Risposta $k = -1$, $\sqrt{2}x - \sqrt{2}y \pm 1 = 0$ **(pt.2)**
- posto $k = 3$ si determinino le coordinate degli eventuali vertici della conica $\mathcal{C}_3$.
  Risposta $V = (-3/8, -5/8)$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino la sfera $\Sigma:\ x^2+y^2+z^2-2z-8 = 0$ e il piano $\pi:\ x+2y+z+5 = 0$. Si determinino:

- centro e raggio della sfera Σ;
  Risposta $C = (0,0,1)$, $R = 3$ **(pt.1)**
- centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C} = \Sigma \cap \pi$;
  Risposta $C' = (-1,-2,0)$, $R' = \sqrt{3}$ **(pt.2)**
- equazioni cartesiane dei piani paralleli a π e tangenti a Σ;
  Risposta $x+2y+z-1 \pm 3\sqrt{6} = 0$ **(pt.2)**
- un'equazione cartesiana della sfera avente il medesimo centro di Σ e tangente a π;
  Risposta $x^2+y^2+z^2-2z-5 = 0$ **(pt.2)**