UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 3^o appello - 21/03/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 0 & 4 & k & k+2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino

- i valori di $k \in \mathbb{R}$, se esistono, per i quali il sistema $A_kX = B$ ammette autosoluzioni;
  Risposta Esistono autosoluzioni $\forall k \in \mathbb{R}$ **(pt.2)**
- per ciascuno di tali valori, lo spazio S_k delle soluzioni del sistema e la sua dimensione;
  Risposta $k \neq -2$ $S_k = \mathcal{L}((2k, 1, -k, k-2))$, $\dim S_k = 1$; $k = -2$ $S_{-2} = \mathcal{L}((-4, 1, 2, 0), (0, 0, 0, 1))$, $\dim S_{-2} = 2$ **(pt.3)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$, se esistono, per i quali $(4, 1, -2, 0)$ è una soluzione del sistema;
  Risposta $k = 2$ **(pt.2)**

Posto $k = 0$ si determini

- una base di S_0;
  Risposta $((0, 1, 0, -2))$ **(pt.1)**
- un complemento diretto di S_0.
  Risposta $\mathcal{L}((1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Si determini se $\mathbf{v} = (0, 4, 4, 2)$ è un autovettore di A e, in caso di risposta affermativa, il corrispondente autovalore;
  Risposta $\mathbf{v}$ è un autovettore corrispondente a $\lambda = 2$ **(pt.2)**
- si stabilisca se $\lambda = 1$ è un autovalore di A e, se possibile, si determini un autovettore $\mathbf{w}$ corrispondente;
  Risposta $\lambda = 1$ è un autovalore, $\mathbf{w} = (0, 1, 0, 0)$ **(pt.2)**
- si dica, motivando la risposta, se la matrice A è diagonalizzabile.
  Risposta No perché l'autovalore $\lambda = 1$ non è regolare **(pt.1)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino le due rette sghembe $r: x + y - 1 = 0 = 2x + 2y - 3z - 2$ ed $a: x = 0 = x + y + z$.

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie descritta dalla retta r nella rotazione di asse a;
  Risposta $x^2 - y^2 - z^2 + 4yz + 2y - 2z - 1 = 0$ **(pt.3)**
- si determinino equazioni cartesiane dei piani paralleli che contengono rispettivamente r ed s e la distanza tra tali rette.
  Risposta $\pi_1: x + y + z - 1 = 0$, $\pi_2: x + y + z = 0$, $d = 1/\sqrt{3}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino le coniche $\mathcal{C}_k: x^2 + ky^2 - 2xy + 2x + 1 - k = 0$, dove k è un parametro reale. Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui:

- $\mathcal{C}_k$ ha centro nel punto $C = [(1, 1, 0)]$;
  Risposta $k = 1$ **(pt.2)**
- $\mathcal{C}_k$ ha un asintoto parallelo alla retta $r: x - 3y = 0$;
  Risposta $k = -3$ **(pt.2)**

Posto $k = 0$ si determini il polo della retta $s: 3x - y + 1 = 0$ nella polarità individuata da $\mathcal{C}_0$.
Risposta $P = [(1, -2, 0)]$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}: y^2 + 2xy - 4z^2 - 4xz + 2x + 4z - 1 = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$;
  Risposta $\mathcal{Q}$ è doppiamente degenere **(pt.1)**
- si riconosca la sezione di $\mathcal{Q}$ con il piano $\alpha: x = 0$, precisando, se la sezione è riducibile, le rette componenti.
  Risposta $\mathcal{C}_\alpha$ è riducibile, $y - 2z + 1 = 0 = x$, $y + 2z - 1 = 0 = x$ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 3^o appello - 21/03/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 2k & 1 & 0 & -1 \\ 2 & k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -k \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino

- i valori di $k \in \mathbb{R}$, se esistono, per i quali il sistema $A_k X = B$ ammette autosoluzioni;
  Risposta Esistono autosoluzioni $\forall k \in \mathbb{R}$ **(pt.2)**
- per ciascuno di tali valori, lo spazio S_k delle soluzioni del sistema e la sua dimensione;
  Risposta $k \neq -1 \quad S_k = \mathcal{L}((3, -6, 2(k^2 - k + 1), 6(k-1))),\ \dim S_k = 1;$
  $k = -1 \quad S_{-1} = \mathcal{L}((-3, -6, 2, 0), (-1, -1, 0, 1)),\ \dim S_{-1} = 2$ **(pt.3)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$, se esistono, per i quali $(3, -6, 2, 0)$ è una soluzione del sistema;
  Risposta $k = 1$ **(pt.2)**

Posto $k = 2$ si determini

- una base di S_2;
  Risposta $((1, -2, 2, 2))$ **(pt.1)**
- un complemento diretto di S_2.
  Risposta $\mathcal{L}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & -1 \\ 9 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- Si determini se $\mathbf{v} = (2, -4, 6, 0)$ è un autovettore di A e, in caso di risposta affermativa, il corrispondente autovalore;
  Risposta $\mathbf{v}$ è un autovettore corrispondente a $\lambda = 3$ **(pt.2)**
- si stabilisca se $\lambda = 2$ è un autovalore di A e, se possibile, si determini un autovettore $\mathbf{w}$ corrispondente;
  Risposta $\lambda = 2$ è un autovalore, $\mathbf{w} = (0, 1, 0, 0)$ **(pt.2)**
- si dica, motivando la risposta, se la matrice A è diagonalizzabile.
  Risposta No perché l'autovalore $\lambda = 2$ non è regolare **(pt.1)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino le due rette sghembe $r: \ x + y = 0 = 2x + 2y - 3z + 3$ ed $a: \ x - 1 = 0 = x + y + z$.

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie descritta dalla retta r nella rotazione di asse a;
  Risposta $x^2 - y^2 - z^2 + 4yz - 2x - 6y + 8z - 7 = 0$ **(pt.3)**
- si determinino equazioni cartesiane dei piani paralleli che contengono rispettivamente r ed s e la distanza tra tali rette.
  Risposta $\pi_1: \ x + y + z - 1 = 0, \quad \pi_2: \ x + y + z = 0, \quad d = 1/\sqrt{3}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino le coniche $\mathcal{C}_k: \ x^2 - ky^2 - 2xy + 2x + 2(k-1)y + 3 = 0$, dove k è un parametro reale. Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui:

- $\mathcal{C}_k$ ha centro nel punto $C = [(1, 1, 0)]$;
  Risposta $k = -1$ **(pt.2)**
- $\mathcal{C}_k$ ha un asintoto parallelo alla retta $r: \ x - 4y + 1 = 0$;
  Risposta $k = 8$ **(pt.2)**

Posto $k = 0$ si determini il polo della retta $s: \ x - 2y + 1 = 0$ nella polarità individuata da $\mathcal{C}_0$.
Risposta $P = [(2, 1, 0)]$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}: \ 4x^2 - z^2 - 2yz + 4xy - 4x - 2y + 1 = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$;
  Risposta $\mathcal{Q}$ è doppiamente degenere **(pt.1)**
- si riconosca la sezione di $\mathcal{Q}$ con il piano $\alpha: \ y = 0$, precisando, se la sezione è riducibile, le rette componenti.
  Risposta $\mathcal{C}_\alpha$ è riducibile, $2x - z - 1 = 0 = y, \quad 2x + z - 1 = 0 = y$ **(pt.2)**