UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 08/02/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si considerino i sottospazi $U_k = \mathcal{L}((k+3,1,0,2),(1,-1,-k,1),(2,0,2,3))$ e $W_k = \mathcal{L}((1,0,0,0),(k-3,k,0,0))$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$ le dimensioni di U_k e W_k;
  Risposta $k=-2$ $\dim U_{-2} = 2$, $k \neq -2$ $\dim U_k = 3$; $k=0$ $\dim W_0 = 1$, $k \neq 0$ $\dim W_k = 2$ **(pt.3)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la somma $U_k + W_k$ è diretta;
  Risposta $k = -2, 0$ **(pt.2)**
- Posto $k = 1$ si determini il complemento ortogonale di W_1;
  Risposta $\mathcal{L}((0,0,1,0),(0,0,0,1))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 3 & 2k & 4k \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 3 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- gli autovalori della matrice A_k;
  Risposta $1, \quad 3-2k, \quad 3+2k$ **(pt.2)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k ammette 3 autovalori distinti;
  Risposta $k \neq \pm 1, 0$ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice risulta diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq \pm 1$ **(pt.2)**
- Posto ora $k = 2$ si determinino una matrice diagonale simile ad A_2 e una matrice diagonalizzante P.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio euclideo $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino la retta $r_k: \ 2x+y+3z-1 = 0 = x+kz-k$ e il piano $\pi_k: \ (k+2)x+y+4z+2k = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$ la mutua posizione di r_k e π_k;
  Risposta $k=-1$ $r_{-1} \subseteq \pi_{-1}$; $k = 1$ $r_1, \ \pi_1$ paralleli e disgiunti; $k \neq \pm 1$ $r_k, \ \pi_k$ incidenti **(pt.3)**
- posto $k = 1$ si determini un'equazione cartesiana del piano contenente r_1 e parallelo a π_1;
  Risposta $3x+y+4z-2 = 0$ **(pt.1)**
- Posto $k = 1$ si determini un'equazione cartesiana della retta proiezione ortogonale di r_1 su π_1;
  Risposta $5x-7y-2z-12 = 0 = 3x+y+4z+2$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino le coniche $\mathcal{C}_k: \ (k-1)x^2 - 3y^2 + 2xy - 2kx + 1 = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ ammette due punti impropri reali e distinti;
  Risposta $k > 2/3$ **(pt.2)**
- Posto $k = 2$ si riconosca la conica $\mathcal{C}_2$ e se ne determino, se esistono e sono reali, centro, asintoti e direzioni degli assi.
  Risposta Iperbole $C = (3/2, 1/2)$ $x-y-1 = 0, \ x+3y-3 = 0$ $[(2 \pm \sqrt{5}, 1, 0)]$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}: \ x^2 + 2z^2 + 2xz + 2yz - 2x - 2y = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$;
  Risposta Iperboloide ellittico **(pt.2)**
- si riconoscano le sezioni piane di $\mathcal{Q}$ con i piani $\alpha: \ x+y = 0$ e $\beta: \ x-z = 0$.
  Risposta $\mathcal{C}_\alpha$ riducibile in due rette immaginarie e coniugate, $\mathcal{C}_\beta$ iperbole **(pt.2)**

2

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 08/02/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si considerino i sottospazi $U_k = \mathcal{L}((k+6,0,1,2),(1,-k-3,-1,1),(2,2,0,3))$ e $W_k = \mathcal{L}((1,0,0,0),(k,0,k+3,0))$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$ le dimensioni di U_k e W_k;
  Risposta $k=-5$ $\dim U_{-5}=2$, $k \neq -5$ $\dim U_k = 3$; $k=-3$ $\dim W_{-3}=1$, $k\neq -3$ $\dim W_k = 2$ **(pt.3)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la somma $U_k + W_k$ è diretta;
  Risposta $k=-5,-3$ **(pt.2)**
- Posto $k=-2$ si determini il complemento ortogonale di W_{-2};
  Risposta $\mathcal{L}((0,1,0,0),(0,0,0,1))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2k & 4k \\ 0 & 5 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- gli autovalori della matrice A_k;
  Risposta $5, \quad 1-2k, \quad 1+2k$ **(pt.2)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k ammette 3 autovalori distinti;
  Risposta $k \neq \pm 2, 0$ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice risulta diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq \pm 2$ **(pt.2)**
- Posto ora $k=1$ si determinino una matrice diagonale simile ad A_1 e una matrice diagonalizzante P.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio euclideo $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino la retta $r_k:\ 2x+y=0=x+kz-k$ e il piano $\pi_k:\ (k+2)x+y+4z+2k=0$, dove k è un parametro reale.

- Si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$ la mutua posizione di r_k e π_k;
  Risposta $k=-2$ $r_{-2} \subseteq \pi_{-2}$; $k=2$ $r_2,\ \pi_2$ paralleli e disgiunti; $k \neq \pm 2$ $r_k,\ \pi_k$ incidenti **(pt.3)**
- posto $k=2$ si determini un'equazione cartesiana del piano contenente r_2 e parallelo a π_2;
  Risposta $4x+y+4z-4=0$ **(pt.1)**
- Posto $k=2$ si determini un'equazione cartesiana della retta proiezione ortogonale di r_2 su π_2;
  Risposta $5x+4y-6z+6=0=4x+y+4z+4$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino le coniche $\mathcal{C}_k:\ (k-1)x^2+3y^2-2xy+2kx+1=0$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ ammette due punti impropri reali e distinti;
  Risposta $k < 4/3$ **(pt.2)**
- Posto $k=-4$ si riconosca la conica $\mathcal{C}_{-4}$ e se ne determino, se esistono e sono reali, centro, asintoti e direzioni degli assi.
  Risposta Iperbole $C=(-3/4,-1/4)$ $x+y+1=0,\ 5x-3y+3=0$ $[(4\pm\sqrt{17},1,0)]$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}:\ x^2-2z^2+2xz+2yz-2x-2y=0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$;
  Risposta Iperboloide iperbolico **(pt.2)**
- si riconoscano le sezioni piane di $\mathcal{Q}$ con i piani $\alpha:\ x+y=0$ e $\beta:\ z=0$.
  Risposta $\mathcal{C}_\alpha$ riducibile in due rette reali e distinte, $\mathcal{C}_\beta$ parabola **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 08/02/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si considerino i sottospazi $U_k = \mathcal{L}((2,1,0,3-k),(1,-1,k,1),(3,0,2,2))$ e $W_k = \mathcal{L}((0,0,0,1),(0,-k,0,-3-k))$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$ le dimensioni di U_k e W_k;
  Risposta $k=2$ $\dim U_2 = 2$, $k \neq 2$ $\dim U_k = 3$; $k=0$ $\dim W_0 = 1$, $k \neq 0$ $\dim W_k = 2$ **(pt.3)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la somma $U_k + W_k$ è diretta;
  Risposta $k = 0, 2$ **(pt.2)**
- Posto $k=-1$ si determini il complemento ortogonale di W_{-1};
  Risposta $\mathcal{L}((1,0,0,0),(0,0,1,0))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 8 & 2k & 4k \\ 0 & 2 & 0 \\ k & 0 & 8 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- gli autovalori della matrice A_k;
  Risposta $2,\quad 8-2k,\quad 8+2k$ **(pt.2)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k ammette 3 autovalori distinti;
  Risposta $k \neq \pm 3, 0$ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice risulta diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq \pm 3$ **(pt.2)**
- Posto ora $k=2$ si determinino una matrice diagonale simile ad A_2 e una matrice diagonalizzante P.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio euclideo $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino la retta $r_k:\ x+2y+3z-1=0=y+(k-2)z+2-k$ e il piano $\pi_k:\ x+ky+4z+2k-4=0$, dove k è un parametro reale.

- Si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$ la mutua posizione di r_k e π_k;
  Risposta $k=1$ $r_1 \subseteq \pi_1$; $k=3$ $r_3,\ \pi_3$ paralleli e disgiunti; $k \neq 1,3$ $r_k,\ \pi_k$ incidenti **(pt.3)**
- posto $k=3$ si determini un'equazione cartesiana del piano contenente r_3 e parallelo a π_3;
  Risposta $x+3y+4z-2=0$ **(pt.1)**
- Posto $k=3$ si determini un'equazione cartesiana della retta proiezione ortogonale di r_3 su π_3;
  Risposta $7x-5y+2z+12=0=x+3y+4z+2$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino le coniche $\mathcal{C}_k:\ 3x^2-ky^2-2xy+2(k+1)y-1=0$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ ammette due punti impropri reali e distinti;
  Risposta $k > -1/3$ **(pt.2)**
- Posto $k=1$ si riconosca la conica $\mathcal{C}_1$ e se ne determino, se esistono e sono reali, centro, asintoti e direzioni degli assi.
  Risposta Iperbole $C=(1/2,3/2)$ $x-y+1=0,\ 3x+y-3=0$ $[(-2\pm\sqrt{5},1,0)]$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}:\ x^2+2z^2+2xz+2yz-2x-2y=0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$;
  Risposta Iperboloide ellittico **(pt.2)**
- si riconoscano le sezioni piane di $\mathcal{Q}$ con i piani $\alpha:\ y-z=0$ e $\beta:\ x+y=0$.
  Risposta $\mathcal{C}_\alpha$ ellisse, $\mathcal{C}_\beta$ riducibile in due rette immaginarie e coniugate **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 08/02/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si considerino i sottospazi $U_k = \mathcal{L}((k,2,0,1),(1,1,3-k,-1),(2,3,2,0))$ e $W_k = \mathcal{L}((1,0,0,0),(k-6,0,0,k-3))$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$ le dimensioni di U_k e W_k;
  Risposta $k=1$ $\dim U_1 = 2$, $k \neq 1$ $\dim U_k = 3$; $k=3$ $\dim W_3 = 1$, $k \neq 3$ $\dim W_k = 2$ **(pt.3)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la somma $U_k + W_k$ è diretta;
  Risposta $k = 1, 3$ **(pt.2)**
- Posto $k = 4$ si determini il complemento ortogonale di W_4;
  Risposta $\mathcal{L}((0,0,1,0),(0,1,0,0))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 5 & 2k & 4k \\ 0 & -3 & 0 \\ k & 0 & 5 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- gli autovalori della matrice A_k;
  Risposta $-3, \quad 5-2k, \quad 5+2k$ **(pt.2)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k ammette 3 autovalori distinti;
  Risposta $k \neq \pm 4, 0$ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice risulta diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq \pm 4$ **(pt.2)**
- Posto ora $k = 1$ si determinino una matrice diagonale simile ad A_1 e una matrice diagonalizzante P.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -8 & -2 & 2 \\ 30 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio euclideo $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino la retta $r_k: \ x + 2y = 0 = y + (k-2)z + 2 - k$ e il piano $\pi_k: \ x + ky + 4z + 2k - 4 = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$ la mutua posizione di r_k e π_k;
  Risposta $k=0$ $r_0 \subseteq \pi_0$; $k=4$ $r_4, \ \pi_4$ paralleli e disgiunti; $k \neq 0, 4$ $r_k, \ \pi_k$ incidenti **(pt.3)**
- posto $k = 4$ si determini un'equazione cartesiana del piano contenente r_4 e parallelo a π_4;
  Risposta $x + 4y + 4z - 4 = 0$ **(pt.1)**
- Posto $k = 4$ si determini un'equazione cartesiana della retta proiezione ortogonale di r_4 su π_4;
  Risposta $4x + 5y - 6z + 6 = 0 = x + 4y + 4z + 4$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino le coniche $\mathcal{C}_k: \ 3x^2 + ky^2 - 2xy + 2(k+1)y + 1 = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ ammette due punti impropri reali e distinti;
  Risposta $k < 1/3$ **(pt.2)**
- Posto $k = -5$ si riconosca la conica $\mathcal{C}_{-5}$ e se ne determino, se esistono e sono reali, centro, asintoti e direzioni degli assi.
  Risposta Iperbole $C = (-1/4, -3/4)$ $x + y + 1 = 0, \ 3x - 5y - 3 = 0$ $[(-4 \pm \sqrt{17}, 1, 0)]$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}: \ x^2 - 2z^2 + 2xz + 2yz - 2x - 2y = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$;
  Risposta Iperboloide iperbolico **(pt.2)**
- si riconoscano le sezioni piane di $\mathcal{Q}$ con i piani $\alpha: \ x + y - z = 0$ e $\beta: \ x - z = 0$.
  Risposta $\mathcal{C}_\alpha$ parabola, $\mathcal{C}_\beta$ iperbole **(pt.2)**