UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o appello - 20/01/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 2k-1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -k \\ 3 & k-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile;

  Risposta Compatibile $\forall\, k \in \mathbb{R}$; $k = 1$ ∞^2 soluz, $k \neq 1$ ∞^1 soluz. **(pt.3)**

- si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$, per cui l'insieme S_k delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$, motivando la risposta;

  Risposta Non esistono, perché il sistema non è mai omogeneo **(pt.1)**

- Posto $k = 1$ si determini l'insieme S_1 delle soluzioni di $A_1X = B_1$;

  Risposta $S_1 = \{(3\beta + 3, \alpha, -4 - 5\beta, \beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

- si determini una base del complemento ortogonale di $\mathcal{L}(S_1)$ rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4$.

  Risposta $((4, 0, 3, 3))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 0 & k & k \\ 0 & 2k & -1 \\ 0 & -1 & 2k \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- gli autovalori della matrice A_k;

  Risposta 0, $2k-1$, $2k+1$ **(pt.2)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui tutti gli autovalori di A_k sono distinti;

  Risposta $k \neq \pm 1/2$ **(pt.1)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice risulta ortogonalmente diagonalizzabile.

  Risposta $k = 0$ **(pt.1)**

- Posto ora $k = 0$ si determinino una matrice diagonale simile ad A_0 e, se possibile, una matrice diagonalizzante ortogonale P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino le coniche $\mathcal{C}_k :\ kx^2 + 2(k-1)xy + 4x + 2(1-k)y + 2 = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ è riducibile e si riconoscano le coniche generali;

  Risposta Riducibile per $k = -6, 1$; Iperbole per $k \neq -6, 1$ **(pt.3)**

- si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ passa per il punto $I_\infty = [(1, i, 0)]$;

  Risposta $\nexists\, k \in \mathbb{R}$ **(pt.2)**

- Posto $k = 0$ si determino, se esistono e sono reali, centro, assi e asintoti della conica $\mathcal{C}_0$.

  Risposta $C = (1, 2)$, asintoti $y - 2 = 0$, $x - 1 = 0$, assi $x - y + 1 = 0$, $x + y - 3 = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si considerino la sfera $\Sigma :\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 4z - 3 = 0$ e il piano $\pi :\ x - 2 = 0$. Si determinino:

- centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C} = \Sigma \cap \pi$;

  Risposta $C = (2, 1, -2)$, raggio$= 2\sqrt{2}$ **(pt.2)**

- equazioni cartesiane dei piani paralleli a π e tangenti a Σ;

  Risposta $x - 4 = 0$, $x + 2 = 0$ **(pt.2)**

- un'equazione cartesiana del cilindro di vertice $V_\infty = [(1, 2, 0, 0)]$ e curva direttrice $\mathcal{C}$.

  Risposta $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 12x + 6y + 4z + 5 = 0$ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o appello - 20/01/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & k-3 \\ 3 & k-2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2-k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile;

  Risposta Compatibile $\forall\, k \in \mathbb{R}$; $k = 3$ ∞^2 soluz, $k \neq 3$ ∞^1 soluz. **(pt.3)**

- si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$, per cui l'insieme S_k delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$, motivando la risposta;

  Risposta $k = 2$, che rende il sistema omogeneo **(pt.1)**

- Posto $k = 0$ si determini l'insieme S_0 delle soluzioni di $A_0X = B_0$;

  Risposta $S_0 = \{(\alpha, \frac{3}{2}\alpha - 1, 0, \frac{2}{3}\alpha) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

- si determini una base del complemento ortogonale di $\mathcal{L}(S_0)$ rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4$.

  Risposta $((-2, 0, 0, 3), (0, 0, 1, 0))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} -1 & k & 0 \\ k & -1 & 0 \\ k-5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- gli autovalori della matrice A_k;

  Risposta $2, \quad -k-1, \quad k-1$ **(pt.2)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui tutti gli autovalori di A_k sono distinti;

  Risposta $k \neq 0, \pm 3$ **(pt.1)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice risulta ortogonalmente diagonalizzabile.

  Risposta $k = 5$ **(pt.1)**

- Posto ora $k = 5$ si determinino una matrice diagonale simile ad A_5 e, se possibile, una matrice diagonalizzante ortogonale P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino le coniche $\mathcal{C}_k : (k-1)x^2 + 2(k-2)xy + 2kx + 2(2-k)y + 6 - 2k = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ è riducibile e si riconoscano le coniche generali;

  Risposta Riducibile per $k = -5, 2$; Iperbole per $k \neq -5, 2$ **(pt.3)**

- si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ passa per il punto $I_\infty = [(1, -i, 0)]$;

  Risposta $\nexists\, k \in \mathbb{R}$ **(pt.2)**

- Posto $k = 1$ si determino, se esistono e sono reali, centro, assi e asintoti della conica $\mathcal{C}_1$.

  Risposta $C = (1, 1)$, asintoti $y - 1 = 0$, $x - 1 = 0$, assi $x + y - 2 = 0$, $x - y = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si considerino la sfera $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 2z - 10 = 0$ e il piano $\pi : z - 2 = 0$. Si determinino:

- centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C} = \Sigma \cap \pi$;

  Risposta $C = (-2, 1, 2)$, raggio$= \sqrt{15}$ **(pt.2)**

- equazioni cartesiane dei piani paralleli a π e tangenti a Σ;

  Risposta $z - 5 = 0$, $z + 3 = 0$ **(pt.2)**

- un'equazione cartesiana del cilindro di vertice $V_\infty = [(0, 2, 1, 0)]$ e curva direttrice $\mathcal{C}$.

  Risposta $x^2 + y^2 + 4z^2 - 4yz + 4x + 6y - 12z - 2 = 0$ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o appello - 20/01/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k+1 & 2k+1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -k-1 \\ 3 & 2 & k & 1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ k+1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile;
  Risposta Compatibile $\forall\, k \in \mathbb{R}$; $k = 0$ ∞^2 soluz, $k \neq 0$ ∞^1 soluz. **(pt.3)**
- si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$, per cui l'insieme S_k delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$, motivando la risposta;
  Risposta Non esistono, perché il sistema non è mai omogeneo **(pt.1)**
- Posto $k = 0$ si determini l'insieme S_0 delle soluzioni di $A_0X = B_0$;
  Risposta $S_0 = \{(3\beta + 3, -4 - 5\beta, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**
- si determini una base del complemento ortogonale di $\mathcal{L}(S_0)$ rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4$.
  Risposta $((4, 3, 0, 3))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 0 & k & k \\ 0 & 2k & -3 \\ 0 & -3 & 2k \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- gli autovalori della matrice A_k;
  Risposta $0,\quad 2k - 3,\quad 2k + 3$ **(pt.2)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui tutti gli autovalori di A_k sono distinti;
  Risposta $k \neq \pm 3/2$ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice risulta ortogonalmente diagonalizzabile.
  Risposta $k = 0$ **(pt.1)**
- Posto ora $k = 0$ si determinino una matrice diagonale simile ad A_0 e, se possibile, una matrice diagonalizzante ortogonale P.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino le coniche $\mathcal{C}_k :\ (k+1)y^2 + 2kxy - 2kx + 4y + 2 = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ è riducibile e si riconoscano le coniche generali;
  Risposta Riducibile per $k = -7, 0$; Iperbole per $k \neq -7, 0$ **(pt.3)**
- si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ passa per il punto $I_\infty = [(1, i, 0)]$;
  Risposta $\nexists\, k \in \mathbb{R}$ **(pt.2)**
- Posto $k = -1$ si determino, se esistono e sono reali, centro, assi e asintoti della conica $\mathcal{C}_{-1}$.
  Risposta $C = (2, 1)$, asintoti $x - 2 = 0$, $y - 1 = 0$, assi $x - y - 1 = 0$, $x + y - 3 = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si considerino la sfera $\Sigma :\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 4z - 3 = 0$ e il piano $\pi :\ y - 2 = 0$. Si determinino:

- centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C} = \Sigma \cap \pi$;
  Risposta $C = (1, 2, -2)$, raggio$= 2\sqrt{2}$ **(pt.2)**
- equazioni cartesiane dei piani paralleli a π e tangenti a Σ;
  Risposta $y - 4 = 0$, $y + 2 = 0$ **(pt.2)**
- un'equazione cartesiana del cilindro di vertice $V_\infty = [(2, 1, 0, 0)]$ e curva direttrice $\mathcal{C}$.
  Risposta $x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy + 6x - 12y + 4z + 5 = 0$ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o appello - 20/01/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & k+1 \\ k-2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & k-1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile;

  Risposta Compatibile $\forall\, k \in \mathbb{R}$; $k = 2$ ∞^2 soluz, $k \neq 2$ ∞^1 soluz. **(pt.3)**

- si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$, per cui l'insieme S_k delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$, motivando la risposta;

  Risposta $k = 1$, che rende il sistema omogeneo **(pt.1)**

- Posto $k = -1$ si determini l'insieme S_{-1} delle soluzioni di $A_{-1}X = B_{-1}$;

  Risposta $S_{-1} = \{(\frac{2}{3}\alpha, \frac{3}{2}\alpha - 1, 0, \alpha) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

- si determini una base del complemento ortogonale di $\mathcal{L}(S_{-1})$ rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4$.

  Risposta $((3, 0, 0, -2), (0, 0, 1, 0))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1 & 0 \\ k-2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- gli autovalori della matrice A_k;

  Risposta -3, $1-k$, $1+k$ **(pt.2)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui tutti gli autovalori di A_k sono distinti;

  Risposta $k \neq 0, \pm 4$ **(pt.1)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice risulta ortogonalmente diagonalizzabile.

  Risposta $k = 2$ **(pt.1)**

- Posto ora $k = 2$ si determinino una matrice diagonale simile ad A_2 e, se possibile, una matrice diagonalizzante ortogonale P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino le coniche $\mathcal{C}_k:\ (k-2)y^2 + 2(k-3)xy - 2(k-3)x + 2(3k-7)y + 20 - 6k = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ è riducibile e si riconoscano le coniche generali;

  Risposta Riducibile per $k = -4, 3$; Iperbole per $k \neq -4, 3$ **(pt.3)**

- si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ passa per il punto $I_\infty = [(1, -i, 0)]$;

  Risposta $\nexists\, k \in \mathbb{R}$ **(pt.2)**

- Posto $k = 2$ si determino, se esistono e sono reali, centro, assi e asintoti della conica $\mathcal{C}_2$.

  Risposta $C = (-1, 1)$, asintoti $y - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, assi $x - y + 2 = 0$, $x + y = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si considerino la sfera $\Sigma:\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 19 = 0$ e il piano $\pi:\ x - 2 = 0$. Si determinino:

- centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C} = \Sigma \cap \pi$;

  Risposta $C = (2, -2, 1)$, raggio$= 2\sqrt{6}$ **(pt.2)**

- equazioni cartesiane dei piani paralleli a π e tangenti a Σ;

  Risposta $x - 6 = 0$, $x + 4 = 0$ **(pt.2)**

- un'equazione cartesiana del cilindro di vertice $V_\infty = [(1, 0, 2, 0)]$ e curva direttrice $\mathcal{C}$.

  Risposta $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xz - 12x + 4y + 6z - 11 = 0$ **(pt.3)**