UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o test - 11/11/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k+1 \\ k & 1 & 0 \\ k-1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile per $k = 0, 2$; $k = 0, 2$ soluz. unica ______ **(pt.4)**

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $(1, 0, 0)$ è soluzione del sistema;

  Risposta $k = 0$ ______ **(pt.2)**

- posto ora $k = 2$ si determini l'insieme S_2 delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S_2 = \{(-1, 2, 2/3)\}$ ______ **(pt.2)**

- si determini un complemento diretto di $\mathcal{L}(S_2)$.

  Risposta $\mathcal{L}(((0, 1, 0), (0, 0, 1)))$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si considerino le sequenze $A = ((1, 0, 1, 0), (-1, 2, 0, 1))$ e $B_k = ((0, k, 2, 1), (1, k, 1, k), (2, 1, 0, 1))$ e i sottospazi $U = \mathcal{L}(A)$ e $W_k = \mathcal{L}(B_k)$, dove $k \in \mathbb{R}$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- una base e la dimensione di W_k e di U;

  Risposta $k \neq 1$ $\dim W_k = 3$, $\mathcal{B}_{W_k} = B_k$; $k = 1$ $\dim W_1 = 2$ $\mathcal{B}_{W_1} = ((0, 1, 2, 1), (1, 1, 1, 1))$; $\dim U = 2$, $\mathcal{B}_U = A$ ______ **(pt.3)**

- le dimensioni di $U + W_k$ e di $U \cap W_k$;

  Risposta $k \neq 1$ $\dim(U + W_k) = 4$, $\dim(U \cap W_k) = 1$; $k = 1$ $\dim(U + W_1) = 4$, $\dim(U \cap W_1) = 0$ **(pt.4)**

- i valori di k, se esistono, per i quali la somma $U + W_k$ è diretta.

  Risposta $k = 1$ ______ **(pt.1)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & k \\ 0 & k & 2 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $1,\ 2 - k,\ 2 + k$ ______ **(pt.2)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k ammette autovalori di molteplicità algebrica 2;

  Risposta $k = \pm 1, 0$ ______ **(pt.1)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$, se esistono, per cui il vettore $(1, 3, 3)$ è un autovettore di A_k.

  Risposta $k = 2$ ______ **(pt.2)**

- posto $k = 1$ si determinino, se esistono, autovalori di A_1 di molteplicità geometrica 2;

  Risposta Non esistono autovalori di molteplicità geometrica 2 ______ **(pt.3)**

- Posto $k = 0$ si determino, se possibile, una matrice diagonale D simile ad A_0 e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.4)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o test - 11/11/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & k+2 \\ 1 & k+1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile per $k = -1, 1$; $k = -1, 1$ soluz. unica ______ **(pt.4)**

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $(0, 1, 0)$ è soluzione del sistema;

  Risposta $k = -1$ ______ **(pt.2)**

- posto ora $k = 1$ si determini l'insieme S_1 delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S_1 = \{(2, -1, 2/3)\}$ ______ **(pt.2)**

- si determini un complemento diretto di $\mathcal{L}(S_1)$.

  Risposta $\mathcal{L}(((0, 1, 0), (0, 0, 1)))$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si considerino le sequenze $A = ((0, -1, 3, 0), (1, 0, 5, 0))$ e $B_k = ((0, k, 2, 6), (0, 0, 1, 3), (2, 0, 0, -k))$ e i sottospazi $U = \mathcal{L}(A)$ e $W_k = \mathcal{L}(B_k)$, dove $k \in \mathbb{R}$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- una base e la dimensione di W_k e di U;

  Risposta $k \neq 0$ $\dim W_k = 3$, $\mathcal{B}_{W_k} = B_k$; $k = 0$ $\dim W_0 = 2$
  $\mathcal{B}_{W_0} = ((0, 0, 1, 3), (2, 0, 0, 0))$; $\dim U = 2$, $\mathcal{B}_U = ((0, -1, 3, 0), (1, 0, 5, 0))$ ______ **(pt.3)**

- le dimensioni di $U + W_k$ e di $U \cap W_k$;

  Risposta $k \neq 0$ $\dim(U + W_k) = 4$, $\dim(U \cap W_k) = 1$; $k = 0$ $\dim(U + W_0) = 4$, $\dim(U \cap W_0) = 0$
  (pt.4)

- i valori di k, se esistono, per i quali la somma $U + W_k$ è diretta.

  Risposta $k = 0$ ______ **(pt.1)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & k \\ 0 & k & -1 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;

  Risposta 3, $-1-k$, $-1+k$ ______ **(pt.2)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k ammette autovalori di molteplicità algebrica 2;

  Risposta $k = \pm 4, 0$ ______ **(pt.1)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$, se esistono, per cui il vettore $(1, 3, -3)$ è un autovettore di A_k.

  Risposta $k = 5$ ______ **(pt.2)**

- posto $k = 4$ si determinino, se esistono, autovalori di A_4 di molteplicità geometrica 2;

  Risposta Non esistono autovalori di molteplicità geometrica 2 ______ **(pt.3)**

- Posto $k = 0$ si determino, se possibile, una matrice diagonale D simile ad A_0 e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.4)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o test - 11/11/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k+3 & 0 \\ k+2 & 0 & 1 \\ k+1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile per $k = -2, 0$; $k = -2, 0$ soluz. unica ______ **(pt.4)**

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $(1, 0, 0)$ è soluzione del sistema;

  Risposta $k = -2$ ______ **(pt.2)**

- posto ora $k = 0$ si determini l'insieme S_0 delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S_0 = \{(-1, 2/3, 2)\}$ ______ **(pt.2)**

- si determini un complemento diretto di $\mathcal{L}(S_0)$.

  Risposta $\mathcal{L}(((0, 1, 0), (0, 0, 1)))$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si considerino le sequenze $A = ((1, 2, 0, 1), (1, 0, 0, -1))$ e $B_k = ((-3, 6, 0, 2k), (1, -2, 0, -k), (k, 0, k, 2k))$ e i sottospazi $U = \mathcal{L}(A)$ e $W_k = \mathcal{L}(B_k)$, dove $k \in \mathbb{R}$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- una base e la dimensione di W_k e di U;

  Risposta $k \neq 0$ $\dim W_k = 3$, $\mathcal{B}_{W_k} = B_k$; $k = 0$ $\dim W_0 = 1$ $\mathcal{B}_{W_0} = ((1, -2, 0, 0))$; $\dim U = 2$, $\mathcal{B}_U = A$ ______ **(pt.3)**

- le dimensioni di $U + W_k$ e di $U \cap W_k$;

  Risposta $k \neq 0$ $\dim(U + W_k) = 4$, $\dim(U \cap W_k) = 1$; $k = 0$ $\dim(U + W_0) = 3$, $\dim(U \cap W_0) = 0$ **(pt.4)**

- i valori di k, se esistono, per i quali la somma $U + W_k$ è diretta.

  Risposta $k = 0$ ______ **(pt.1)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & k \\ 0 & k & -2 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;

  Risposta 4, $-2-k$, $-2+k$ ______ **(pt.2)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k ammette autovalori di molteplicità algebrica 2;

  Risposta $k = \pm 6, 0$ ______ **(pt.1)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$, se esistono, per cui il vettore $(1, 3, -3)$ è un autovettore di A_k.

  Risposta $k = -3$ ______ **(pt.2)**

- posto $k = -6$ si determinino, se esistono, autovalori di A_{-6} di molteplicità geometrica 2;

  Risposta Non esistono autovalori di molteplicità geometrica 2 ______ **(pt.3)**

- Posto $k = 0$ si determino, se possibile, una matrice diagonale D simile ad A_0 e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.4)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o test - 11/11/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k-1 \\ 0 & 0 & k-2 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile per $k = 1, 3$; $k = 1, 3$ soluz. unica ______ **(pt.4)**

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $(0, 0, 1)$ è soluzione del sistema;

  Risposta $k = 1$ ______ **(pt.2)**

- posto ora $k = 3$ si determini l'insieme S_3 delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S_3 = \{(2/3, 2, -1)\}$ ______ **(pt.2)**

- si determini un complemento diretto di $\mathcal{L}(S_3)$.

  Risposta $\mathcal{L}(((0, 1, 0), (0, 0, 1)))$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si considerino le sequenze $A = ((3, 0, 0, 4), (-6, 0, 0, -8))$ e $B_k = ((k-2, 3, 0, 1), (1, 0, 0, -3), (0, 3, k-6, k+7))$ e i sottospazi $U = \mathcal{L}(A)$ e $W_k = \mathcal{L}(B_k)$, dove $k \in \mathbb{R}$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- una base e la dimensione di W_k e di U;

  Risposta $k \neq 6$ $\dim W_k = 3$, $\mathcal{B}_{W_k} = B_k$; $k = 6$ $\dim W_6 = 2$ $\mathcal{B}_{W_6} = ((4, 3, 0, 1), (1, 0, 0, -3))$; $\dim U = 1$, $\mathcal{B}_U = ((3, 0, 0, 4))$ ______ **(pt.3)**

- le dimensioni di $U + W_k$ e di $U \cap W_k$;

  Risposta $k \neq 6$ $\dim(U + W_k) = 4$, $\dim(U \cap W_k) = 0$; $k = 6$ $\dim(U + W_6) = 3$, $\dim(U \cap W_6) = 0$ **(pt.4)**

- i valori di k, se esistono, per i quali la somma $U + W_k$ è diretta.

  Risposta $\forall\, k \in \mathbb{R}$ ______ **(pt.1)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & k \\ 0 & k & 3 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $-2,\ 3-k,\ 3+k$ ______ **(pt.2)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k ammette autovalori di molteplicità algebrica 2;

  Risposta $k = \pm 5, 0$ ______ **(pt.1)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$, se esistono, per cui il vettore $(1, 3, 3)$ è un autovettore di A_k.

  Risposta $k = -2$ ______ **(pt.2)**

- posto $k = -5$ si determinino, se esistono, autovalori di A_{-5} di molteplicità geometrica 2;

  Risposta Non esistono autovalori di molteplicità geometrica 2 ______ **(pt.3)**

- Posto $k = 0$ si determino, se possibile, una matrice diagonale D simile ad A_0 e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.4)**