UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 5^o appello - 25/08/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri, al variare dei parametri reali a e b, il sistema $A_{a,b}X = B$, dove:
$A_{a,b} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a+b & a & 0 \\ b & a & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- Si discuta la compatibilità del sistema, al variare di $a, b \in \mathbb{R}$, precisando il numero di soluzioni, qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Comp. $\forall a, b \in \mathbb{R}$; se $a = 0$, $\forall b \in \mathbb{R}$: ∞^1 soluzioni; se $a \neq 0$, $\forall b \in \mathbb{R}$: $\exists!$ soluzione **(pt.3)**

- Si risolva il sistema per ciascun valore dei parametri per il quale esso è compatibile.

  Risposta $S_{0,b} = \mathcal{L}((0,1,0))$; se $a \neq 0$: $S_{a,b} = \{(0,0,0)\}$. **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale.

- Si indichino i valori di k per i quali esiste un autospazio di dimensione 2.

  Risposta $\forall k$ **(pt.3)**

- Per $k = 4$, si scriva la matrice diagonale D simile ad A_4 e una matrice P tale che $D = P^{-1}A_4P$.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

- Per $k \neq 3$, si determini una base di un complemento diretto dell'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 3$.

  Risposta $B = ((0,1,0))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k$: $kx^2 + y^2 - kx - y = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ risulta riducibile, precisando per ciascuno di tali valori le rette componenti la conica;

  Risposta $k = 0$, $\quad y = 0,\ y - 1 = 0$; $\qquad k = -1$, $\quad x - y = 0,\ x + y - 1 = 0$ **(pt.2)**

- si classifichino, al variare di $k \in \mathbb{R}$ le coniche generali;

  Risposta $k > 0$: ellissi; $k < 0, k \neq -1$: iperboli **(pt.2)**

- si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui i punti $P = (3,0)$ e $Q = (0,-1)$ sono coniugati rispetto alla conica $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $\frac{1}{3}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ si scriva un'equazione cartesiana del fascio di piani paralleli alle rette r : $2y + z - 6 = 0 = x + z - 1$ ed s : $x + z + 2 = 0 = x + 2y - 8$.

Risposta $x + z + k = 0,\ k \in \mathbb{R}$ **(pt.2)**

Si scrivano le equazioni cartesiane della proiezione ortogonale della retta r sul piano di equazione: $x + z + 1 = 0$.

Risposta $x - 4y - z + 11 = 0 = x + z + 1$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ si determini la mutua posizione delle rette r : $x + y - 1 = 0 = y + z - 1$ e a : $x = y = 0$.

Risposta Sghembe **(pt.2)**

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{Q}$ ottenuta tramite la rotazione di r attorno ad a.

  Risposta $x^2 + y^2 - 2z^2 + 2z - 1 = 0$ **(pt.3)**

- Si riconosca tale superficie, specificando la natura dei suoi punti semplici.

  Risposta Iperboloide iperbolico **(pt.1)**

- Si riconosca la sezione piana di $\mathcal{Q}$ con il piano $\pi : x + y = 0$

  Risposta Iperbole **(pt.1)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 5^o appello - 25/08/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri, al variare dei parametri reali a e b, il sistema $A_{a,b}X = B$, dove:
$$A_{a,b} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ b & a+b & 0 \\ b & a & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- Si discuta la compatibilità del sistema, al variare di $a, b \in \mathbb{R}$, precisando il numero di soluzioni, qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Comp. $\forall a, b \in \mathbb{R}$; se $b = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$: ∞^1 soluzioni; se $b \neq 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$: $\exists!$ soluzione **(pt.3)**

- Si risolva il sistema per ciascun valore dei parametri per il quale esso è compatibile.

  Risposta $S_{a,0} = \mathcal{L}((1,0,0))$; se $b \neq 0$: $S_{a,b} = \{(0,0,0)\}$. **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale.

- Si indichino i valori di k per i quali esiste un autospazio di dimensione 2.

  Risposta $\forall k$ **(pt.3)**

- Per $k = 5$, si scriva la matrice diagonale D simile ad A_5 e una matrice P tale che $D = P^{-1}A_5P$.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

- Per $k \neq 1$, si determini una base di un complemento diretto dell'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 1$.

  Risposta $B = ((0,1,0))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k$: $x^2 + (k+1)y^2 - x - (k+1)y = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ risulta riducibile, precisando per ciascuno di tali valori le rette componenti la conica;

  Risposta $k = -1$, $x = 0$, $x - 1 = 0$; $k = -2$, $x - y = 0$, $x + y - 1 = 0$ **(pt.2)**

- si classifichino, al variare di $k \in \mathbb{R}$ le coniche generali;

  Risposta $k > -1$: ellissi; $k < -1, k \neq -2$: iperboli **(pt.2)**

- si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui i punti $P = (0,3)$ e $Q = (-1,0)$ sono coniugati rispetto alla conica $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $-\frac{2}{3}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ si scriva un'equazione cartesiana del fascio di piani paralleli alle rette r : $2x + z - 6 = 0 = y + z - 1$ ed s : $y + z + 2 = 0 = 2x + y - 8$.

Risposta $y + z + k = 0$, $k \in \mathbb{R}$ **(pt.2)**

Si scrivano le equazioni cartesiane della proiezione ortogonale della retta r sul piano di equazione: $y + z + 1 = 0$.

Risposta $4x - y + z - 11 = 0 = y + z + 1$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ si determini la mutua posizione delle rette r : $y = 0 = x - z + 4$ e a : $x = y = 0$.

Risposta Incidenti **(pt.2)**

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{Q}$ ottenuta tramite la rotazione di r attorno ad a.

  Risposta $x^2 + y^2 - z^2 + 8z - 16 = 0$ **(pt.3)**

- Si riconosca tale superficie, specificando la natura dei suoi punti semplici.

  Risposta Cono a falda reale, punti semplici parabolici **(pt.1)**

- Si riconosca la sezione piana di $\mathcal{Q}$ con il piano $\pi : x + z + 1 = 0$

  Risposta Parabola **(pt.1)**