UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 4^o appello - 02/7/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k+3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & k+1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2k \\ k-1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile;

  Risposta Compatibile per $k = -1$, ∞^1 soluzioni **(pt.3A)**

- si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui l'insieme S_k delle soluzioni del sistema è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$;

  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ **(pt.1A)**

- posto $k = -1$ si determini una base ortonormale di $\mathcal{L}(S_{-1})$ rispetto al prodotto scalare euclideo, dove S_{-1} è l'insieme delle soluzioni del sistema $A_{-1}X = B_{-1}$.

  Risposta $B = ((0, 1, 0), (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}))$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri la sequenza $A_k = ((1, 0, 1, 1), (2, 0, k-1, 1), (4, 0, 2, k))$, dove $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k è completabile a base di $\mathbb{R}^4$ e, per ciascuno di tali valori, una sequenza S costituita da vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$ che completi A_k a base.

Risposta $k \neq 2, 5$; $S = ((0, 1, 0, 0))$ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 3. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & k-1 \\ k+1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- gli autovalori della matrice A_k e le rispettive molteplicità algebriche;

  Risposta $\lambda_1 = 0$, $a_0 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $a_1 = 2$ **(pt.2A)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k risulta diagonalizzabile;

  Risposta $k = -1$ **(pt.2A)**

- per ciascuno dei valori determinati al punto precedente, una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A_k;

  Risposta $B = ((0, 1, 0), (-1, 1, 0), (-2, 0, 1))$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$, data la conica $\mathcal{C}_k :\ x^2 + 5y^2 + 2kxy - 6kx - 1 = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, si determinino

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è tangente alla retta impropria r_∞;

  Risposta $k = \pm\sqrt{5}$ **(pt.1G)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ ha un asintoto parallelo alla retta $r :\ 2x - 10y + 7 = 0$.

  Risposta $k = -3$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{R})$ si considerino la retta $r :\ x + y - 1 = 0 = 2x + z$ ed il punto $P = (1, 0, 1)$.

- Si determini una rappresentazione cartesiana del piano passante per P e ortogonale ad r;

  Risposta $x - y - 2z + 1 = 0$ **(pt.2G)**

- si determinino delle equazioni cartesiane dei piani contenenti r e distanti $3/\sqrt{5}$ da P.

  Risposta $2y - z - 2 = 0$, $2x + z = 0$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 6. In $E_3(\mathbb{C})$ si considerino le sfere $\Sigma_k :\ x^2 + y^2 + z^2 + 2kx - 2ky - 6z - 2k = 0$ e il piano $\pi :\ x - z - 2 = 0$, dove $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica sezione $\Sigma_k \cap \pi$ contiene dei punti reali.

Risposta $k \leqslant \frac{3-\sqrt{30}}{3} \quad \vee \quad k \geqslant \frac{3+\sqrt{30}}{3}$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica di equazione $\mathcal{Q} :\ x^2 - z^2 + 2xz + 4yz + 2x + 2 = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$, precisando la natura dei suoi punti semplici;

  Risposta Iperboloide ellittico **(pt.2G)**

- si riconosca la sezione di $\mathcal{Q}$ con il piano $\pi :\ x - z = 0$, precisando, qualora la sezione sia riducibile, le rette componenti.

  Risposta Iperbole **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 4^o appello - 02/7/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1-k \\ 1 & 3-k & 1 \\ 0 & 2 & 3-k \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \\ -2 \\ k-1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile;

  Risposta Compatibile per $k = 1$, ∞^1 soluzioni **(pt.3A)**
- si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui l'insieme S_k delle soluzioni del sistema è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$;

  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ **(pt.1A)**
- posto $k = 1$ si determini una base ortonormale di $\mathcal{L}(S_1)$ rispetto al prodotto scalare euclideo, dove S_1 è l'insieme delle soluzioni del sistema $A_1X = B_1$.

  Risposta $B = ((1,0,0),(0,-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}))$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri la sequenza $A_k = ((2,k,0,3),(1,1,0,2),(4,2,0,k+5))$, dove $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k è completabile a base di $\mathbb{R}^4$ e, per ciascuno di tali valori, una sequenza S costituita da vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$ che completi A_k a base.

Risposta $k \neq 1, 4$; $S = ((0,0,1,0))$ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 3. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ k-1 & 0 & k-2 \\ k & 0 & 2 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- gli autovalori della matrice A_k e le rispettive molteplicità algebriche;

  Risposta $\lambda_1 = 0$, $a_0 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $a_2 = 2$ **(pt.2A)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k risulta diagonalizzabile;

  Risposta $k = 0$ **(pt.2A)**
- per ciascuno dei valori determinati al punto precedente, una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A_k;

  Risposta $B = ((0,1,0),(-2,1,0),(-2,0,1))$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$, data la conica $\mathcal{C}_k: \ 8x^2 + y^2 - 2kxy + 6kx - 1 = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, si determinino

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è tangente alla retta impropria r_∞;

  Risposta $k = \pm 2\sqrt{2}$ **(pt.1G)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ ha un asintoto parallelo alla retta $r: \ 8x - 2y + 5 = 0$.

  Risposta $k = 3$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{R})$ si considerino la retta $r: \ x + y + 1 = 0 = 2y + z$ ed il punto $P = (-1,0,1)$.

- Si determini una rappresentazione cartesiana del piano passante per P e ortogonale ad r;

  Risposta $x - y + 2z - 1 = 0$ **(pt.2G)**
- si determinino delle equazioni cartesiane dei piani contenenti r e distanti $1/\sqrt{5}$ da P.

  Risposta $2x - z + 2 = 0$, $2y + z = 0$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 6. In $E_3(\mathbb{C})$ si considerino le sfere $\Sigma_k: \ x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2ky - 2kz + 2k = 0$ e il piano $\pi: \ x - z + 2 = 0$, dove $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica sezione $\Sigma_k \cap \pi$ contiene dei punti reali.

Risposta $k \leqslant \frac{-3-\sqrt{30}}{3}$ $\vee$ $k \geqslant \frac{-3+\sqrt{30}}{3}$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica di equazione $\mathcal{Q}: \ x^2 - y^2 + 2xy + 2yz + 2x + 2 = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$, precisando la natura dei suoi punti semplici;

  Risposta Iperboloide ellittico **(pt.2G)**
- si riconosca la sezione di $\mathcal{Q}$ con il piano $\pi: \ y - z = 0$, precisando, qualora la sezione sia riducibile, le rette componenti.

  Risposta Parabola **(pt.2G)**