UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 3^o appello - 11/04/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $M_3(\mathbb{C})$ è data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si verifichi se A è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$ e si giustifichi la risposta.

Risposta È diagonalizzabile perché ha tre autovalori distinti. **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 7 \\ k & 0 & 5 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di k per i quali A_k possiede autovalori distinti.

Risposta $k \neq -1, 5$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, dotato di prodotto scalare euclideo, sia $U = \{(a, b-a, a, c) \in \mathbb{R}^4 \ : \ a, b, c, \in \mathbb{R}\}$. Si determini una base ortogonale di $\mathcal{L}(U)$.

Risposta $((0,0,0,1),(0,1,0,0),(1,0,1,0))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri, al variare del parametro reale k, il sistema $A_k X = B_k$, dove:

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & k \\ 3 & k+1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k+1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- Si discuta la compatibilità del sistema, al variare di $k \in \mathbb{R}$, precisando il numero di soluzioni, qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile per $k \neq 0$, ∞^1 soluzioni **(pt.2)**

- Posto $k = -1$, sia S l'insieme delle soluzioni del sistema. Si stabilisca, motivando la risposta, se S è un sottospazio di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ e si indichi una base per $\mathcal{L}(S)$.

  Risposta S non è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ perché il sistema non è omogeneo; $((1,1,-1),(1,0,0))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{R})$ sia $\mathcal{F}$ l'insieme di circonferenze $x^2+y^2-x+4y+k=0$, al variare di $k \in \mathbb{R}$. Si determini un'equazione cartesiana della circonferenza di $\mathcal{F}$ tangente alla retta $r \ : \ x = y$.

Risposta $x^2+y^2-x+4y+\frac{9}{8}=0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r: \ 2x+z-1=0=y+6z-2$ ed $s: \ y-6z-2=0=x+z-1$ e il piano $\alpha \ : \ y+1=0$. Si determinino le equazioni cartesiane delle rette incidenti r ed s e distanti 3 dal piano α.

Risposta $y+4=0=x+z-1$; $\quad y-2=0=z$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r: \ x+2y-1=0=4x+z+3$ ed $s: \ 6x-4y+2z+2k-1=0=2x+(2k-1)y-2$, al variare del parametro reale k. Si determinino i valori di k per i quali esiste un piano ortogonale alla retta r e parallelo alla retta s.

Risposta $k = -\frac{2}{13}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 8. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determinino:

- delle equazioni cartesiane della retta passante per $A = (-2,1,0)$ e per $B = (2i, 1+i, 1)$;

  Risposta $y-iz-1=0=x-2(i+1)z+2$ **(pt.1)**

- un'equazione cartesiana del piano reale, se esiste, che contiene tale retta.

  Risposta $x-2y-2z+4=0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 9. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r: \ x+z-4=y=0$ e $a: \ y=0=2x-z$.

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{Q}$ ottenuta tramite la rotazione della retta r attorno alla retta a.

  Risposta $x^2-y^2+7z^2+8xz-24x-48z+80=0$ **(pt.3)**

- Si riconosca tale superficie, specificando la natura dei suoi punti semplici.

  Risposta Cono, punti semplici parabolici **(pt.1)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 3^o appello - 11/04/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $M_3(\mathbb{C})$ è data la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Si verifichi se A è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$ e si giustifichi la risposta.
Risposta È diagonalizzabile perché ha tre autovalori distinti. ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ k & 0 & 4 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di k per i quali A_k possiede autovalori distinti.
Risposta $k \neq 3, 4$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, dotato di prodotto scalare euclideo, sia $U = \{(a, b + c, c, -c) \in \mathbb{R}^4 \ : \ a, b, c, \in \mathbb{R}\}$. Si determini una base ortogonale di $\mathcal{L}(U)$.
Risposta $((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -1))$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri, al variare del parametro reale k, il sistema $A_k X = B_k$, dove:

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k-2 & k-2 & 0 \\ 6 & k-1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k-1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- Si discuta la compatibilità del sistema, al variare di $k \in \mathbb{R}$, precisando il numero di soluzioni, qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile per $k \neq 2$, ∞^1 soluzioni ______ **(pt.2)**

- Posto $k = 1$, sia S l'insieme delle soluzioni del sistema. Si stabilisca, motivando la risposta, se S è un sottospazio di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ e si indichi una base per $\mathcal{L}(S)$.

  Risposta S non è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ perché il sistema non è omogeneo; $((-1, 1, 2), (0, 0, 1))$. **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{R})$ sia $\mathcal{F}$ l'insieme di circonferenze $x^2+y^2-x+4y+k = 0$, al variare di $k \in \mathbb{R}$. Si determini un'equazione cartesiana della circonferenza di $\mathcal{F}$ tangente alla retta $r \ : \ y = 2x$.
Risposta $x^2 + y^2 - x + 4y + \frac{49}{20} = 0$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r: \ y + 2z - 1 = 0 = x + 6y - 2$ ed $s: \ x - 6y - 2 = 0 = y + z - 1$ e il piano $\alpha \ : \ x + 1 = 0$. Si determinino le equazioni cartesiane delle rette incidenti r ed s e distanti 3 dal piano α.
Risposta $x + 4 = 0 = y + z - 1; \qquad x - 2 = 0 = y$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r: \ x+2y-1 = 0 = 4x+z+3$ ed $s: \ 3x-2y+z+k = 0 = x+ky-1$, al variare del parametro reale k. Si determinino i valori di k per i quali esiste un piano ortogonale alla retta r e parallelo alla retta s.
Risposta $k = -\frac{17}{26}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 8. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determinino:

- delle equazioni cartesiane della retta passante per $A = (0, -2, 1)$ e per $B = (1, 2i, 1 + i)$;

  Risposta $ix - z + 1 = 0 = 2(i + 1)x - y - 2$ ______ **(pt.1)**

- un'equazione cartesiana del piano reale, se esiste, che contiene tale retta.

  Risposta $2x - y + 2z - 4 = 0$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 9. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r: \ x + y - 4 = z = 0$ e $a: \ z = 0 = 2x - y$.

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{Q}$ ottenuta tramite la rotazione della retta r attorno alla retta a.

  Risposta $x^2 + 7y^2 - z^2 + 8xy - 24x - 48y + 80 = 0$ ______ **(pt.3)**

- Si riconosca tale superficie, specificando la natura dei suoi punti semplici.

  Risposta Cono, punti semplici parabolici ______ **(pt.1)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 3^o appello - 11/04/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $M_3(\mathbb{C})$ è data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Si verifichi se A è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$ e si giustifichi la risposta.
Risposta È diagonalizzabile perché ha tre autovalori distinti. **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ k & 0 & -3 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di k per i quali A_k possiede autovalori distinti.
Risposta $k \neq -3, -2$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, dotato di prodotto scalare euclideo, sia $U = \{(a, -b, b, c-b) \in \mathbb{R}^4 \ : \ a, b, c, \in \mathbb{R}\}$. Si determini una base ortogonale di $\mathcal{L}(U)$.
Risposta $((1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 1, -1, 0))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri, al variare del parametro reale k, il sistema $A_kX = B_k$, dove:

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2k-1 & 0 & 2k-1 \\ 3 & 3 & 2k \end{pmatrix}, \quad B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- Si discuta la compatibilità del sistema, al variare di $k \in \mathbb{R}$, precisando il numero di soluzioni, qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile per $k \neq 1/2$, ∞^1 soluzioni **(pt.2)**

- Posto $k = 0$, sia S l'insieme delle soluzioni del sistema. Si stabilisca, motivando la risposta, se S è un sottospazio di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ e si indichi una base per $\mathcal{L}(S)$.

  Risposta S non è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ perché il sistema non è omogeneo; $((-1, 1, 1), (0, 1, 0))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{R})$ sia $\mathcal{F}$ l'insieme di circonferenze $x^2+y^2-x+4y+k = 0$, al variare di $k \in \mathbb{R}$. Si determini un'equazione cartesiana della circonferenza di $\mathcal{F}$ tangente alla retta $r \ : \ y = x-1$.
Risposta $x^2 + y^2 - x + 4y + \frac{25}{8} = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r : \ x+2y-1 = 0 = 6x+z-2$ ed $s : \ 6x-z+2 = 0 = x+y-1$ e il piano $\alpha \ : \ z+1 = 0$. Si determinino le equazioni cartesiane delle rette incidenti r ed s e distanti 3 dal piano α.
Risposta $z + 4 = 0 = x + y - 1; \qquad z - 2 = 0 = x$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r : \ x+2y-1 = 0 = 4x+z+3$ ed $s : \ 6x-4y+2z+2k+3 = 0 = 2x+(2k+3)y-2$, al variare del parametro reale k. Si determinino i valori di k per i quali esiste un piano ortogonale alla retta r e parallelo alla retta s.
Risposta $k = -\frac{28}{13}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 8. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determinino:

- delle equazioni cartesiane della retta passante per $A = (1, 0, -2)$ e per $B = (1+i, 1, 2i)$;

  Risposta $x - iy - 1 = 0 = 2(i+1)y - z - 2$ **(pt.1)**

- un'equazione cartesiana del piano reale, se esiste, che contiene tale retta.

  Risposta $2x + 2y - z - 4 = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 9. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r : \ y+z-4 = x = 0$ e $a : \ x = 0 = y-2z$.

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{Q}$ ottenuta tramite la rotazione della retta r attorno alla retta a.

  Risposta $x^2 - 7y^2 - z^2 - 8yz + 48y + 24z - 80 = 0$ **(pt.3)**

- Si riconosca tale superficie, specificando la natura dei suoi punti semplici.

  Risposta Cono, punti semplici parabolici **(pt.1)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 3^o appello - 11/04/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $M_3(\mathbb{C})$ è data la matrice $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Si verifichi se A è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$ e si giustifichi la risposta.

Risposta È diagonalizzabile perché ha tre autovalori distinti. ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \\ k & 0 & -1 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di k per i quali A_k possiede autovalori distinti.

Risposta $k \neq -1, 4$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, dotato di prodotto scalare euclideo, sia $U = \{(a, b, c + a, -a) \in \mathbb{R}^4 \ : \ a, b, c, \in \mathbb{R}\}$. Si determini una base ortogonale di $\mathcal{L}(U)$.

Risposta $((0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, -1))$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri, al variare del parametro reale k, il sistema $A_k X = B_k$, dove:

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \\ 3 & k+2 & 6 \end{pmatrix}, \quad B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k+2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- Si discuta la compatibilità del sistema, al variare di $k \in \mathbb{R}$, precisando il numero di soluzioni, qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile per $k \neq -1$, ∞^1 soluzioni ______ **(pt.2)**

- Posto $k = -2$, sia S l'insieme delle soluzioni del sistema. Si stabilisca, motivando la risposta, se S è un sottospazio di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ e si indichi una base per $\mathcal{L}(S)$.

  Risposta S non è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ perché il sistema non è omogeneo; $((2, 1, -1), (1, 0, 0))$. **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{R})$ sia $\mathcal{F}$ l'insieme di circonferenze $x^2 + y^2 - x + 4y + k = 0$, al variare di $k \in \mathbb{R}$. Si determini un'equazione cartesiana della circonferenza di $\mathcal{F}$ tangente alla retta $r \ : \ y = 2x + 1$.

Risposta $x^2 + y^2 - x + 4y + \frac{21}{20} = 0$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r: \ 2x + y - 1 = 0 = 6y + z - 2$ ed $s: \ 6y - z + 2 = 0 = x + y - 1$ e il piano $\alpha \ : \ z + 1 = 0$. Si determinino le equazioni cartesiane delle rette incidenti r ed s e distanti 3 dal piano α.

Risposta $z + 4 = 0 = x + y - 1$; $\quad z - 2 = 0 = y$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r: \ x + 2y - 1 = 0 = 4x + z + 3$ ed $s: \ 6x - 4y + 2z + 2k + 1 = 0 = 2x + (2k + 1)y - 2$, al variare del parametro reale k. Si determinino i valori di k per i quali esiste un piano ortogonale alla retta r e parallelo alla retta s.

Risposta $k = -\frac{15}{13}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 8. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determinino:

- delle equazioni cartesiane della retta passante per $A = (1, -2, 0)$ e per $B = (1 + i, 2i, 1)$;

  Risposta $x - iz - 1 = 0 = y - 2(i + 1)z + 2$ ______ **(pt.1)**

- un'equazione cartesiana del piano reale, se esiste, che contiene tale retta.

  Risposta $2x - y + 2z - 4 = 0$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 9. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r: \ x + y - 4 = z = 0$ e $a: \ z = 0 = x - 2y$.

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{Q}$ ottenuta tramite la rotazione della retta r attorno alla retta a.

  Risposta $7x^2 + y^2 - z^2 + 8xy - 48x - 24y + 80 = 0$ ______ **(pt.3)**

- Si riconosca tale superficie, specificando la natura dei suoi punti semplici.

  Risposta Cono, punti semplici parabolici ______ **(pt.1)**