UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 09/2/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x + ky + z = 0 \\ 2x - y - kz = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ x + 2y + (k-1)z = 0 \end{cases}$$

- Se ne discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile;

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; se $k \neq -1, 2$ soluzione unica, $k = -1, 2$ ∞^1 soluzioni ________ **(pt.3)**

- Si indichino i valori del parametro k per i quali la terna $(3, -4, 5)$ è soluzione del sistema;

  Risposta $k = 2$ ________ **(pt.1)**

- Posto $k = -1$, sia S l'insieme delle soluzioni del sistema. Si dica se S è un sottospazio di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$. Si scrivano: una base di un complemento diretto D di S e una base del complemento ortogonale $S^\perp$ di S rispetto al prodotto scalare euclideo.

  Risposta S è sottospazio di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ perché il sistema è omogeneo; $\mathcal{B}_D = ((1,0,0),(0,1,0))$, $\mathcal{B}_{S^\perp} = ((1,0,0),(0,1,-1))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k-1 & 0 \\ 0 & k+1 & 0 \\ 2 & k & 2 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- i valori di k per i quali il vettore $(4, 2, -3)$ è un autovettore di A_k. Si indichi l'autovalore relativo a tale autovettore;

  Risposta $k = -1, \ \lambda = 0$ ________ **(pt.1)**

- i valori di k per i quali la matrice è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq 0, 1$ ________ **(pt.2)**

- posto $k = 3$, una matrice diagonale D simile ad A_3 e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & 13 \end{pmatrix}$ ________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k : \ 2x^2 + y^2 + kxy - 6x + 4y + 4 = 0$, dove k è un parametro reale. Si determinino, se esistono:

- un'equazione cartesiana del luogo dei centri delle coniche di $\mathcal{C}_k$. Si riconosca tale luogo;

  Risposta $2x^2 - y^2 - 3x - 2y = 0$, iperbole ________ **(pt.3)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali i punti $P = (0, 1)$ e $Q = (6, 0)$ sono coniugati rispetto a $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $k = 4$ ________ **(pt.1)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la conica $\mathcal{C}_k$ è un'iperbole equilatera.

  Risposta $\nexists k$ ________ **(pt.1)**

ESERCIZIO 4. Nello spazio euclideo $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino i punti $A = (2, -1, 1)$ e $B = (0, 1, 2)$. Si determinino delle equazioni cartesiane dei seguenti enti:

- il piano π sul quale giace la retta AB e parallelo all'asse x;

  Risposta $y - 2z + 3 = 0$ ________ **(pt.2)**

- i piani α e β perpendicolari alla retta AB e distanti 3 da B;

  Risposta $2x - 2y - z + 13 = 0, \ 2x - 2y - z - 5 = 0$ ________ **(pt.2)**

- la sfera passante per i punti A e B e con centro sulla retta AB.

  Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3z + 1 = 0$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} : \ x^2 + y^2 + 2xz + 2yz + 2z^2 + 2y = 0$ precisando la natura dei suoi punti semplici.

Risposta Paraboloide ellittico ________ **(pt.4)**

Si riconoscano la sezioni di $\mathcal{Q}$ ottenute con i piani $\alpha : \ z = 0$ e $\beta : \ x + z = 0$.

Risposta $\mathcal{Q} \cap \alpha$: ellisse, $\mathcal{Q} \cap \beta$: parabola ________ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 09/2/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x+2ky+3z=0 \\ (2k+1)x+3z=0 \\ kx+y+z=0 \\ (k+1)x-y+2z=0 \end{cases}$$

- Se ne discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile;

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; se $k \neq 0, -2$ soluzione unica, $k = 0, -2$ ∞^1 soluzioni **(pt.3)**

- Si indichino i valori del parametro k per i quali la terna $(3, 1, -1)$ è soluzione del sistema;

  Risposta $k = 0$ **(pt.1)**

- Posto $k = -2$, sia S l'insieme delle soluzioni del sistema. Si dica se S è un sottospazio di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$. Si scrivano: una base di un complemento diretto D di S e una base del complemento ortogonale $S^\perp$ di S rispetto al prodotto scalare euclideo.

  Risposta S è sottospazio di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ perché il sistema è omogeneo; $\mathcal{B}_D = ((1,0,0),(0,1,0))$, $\mathcal{B}_{S^\perp} = ((-1,1,0),(-1,0,1))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} -1 & k-1 & 0 \\ 0 & k+1 & 0 \\ 2 & k-2 & 1 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- i valori di k per i quali il vettore $(4, 1, -1)$ è un autovettore di A_k. Si indichi l'autovalore relativo a tale autovettore;

  Risposta $k = -3$, $\lambda = -2$ **(pt.1)**

- i valori di k per i quali la matrice è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq 0, -2$ **(pt.2)**

- posto $k = 3$, una matrice diagonale D simile ad A_3 e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k :\ x^2 - 2y^2 + kxy + 4x - 2y + 4 = 0$, dove k è un parametro reale. Si determinino, se esistono:

- un'equazione cartesiana del luogo dei centri delle coniche di $\mathcal{C}_k$. Si riconosca tale luogo;

  Risposta $x^2 + 2y^2 + 2x + y = 0$, ellisse **(pt.3)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali i punti $P = (0, -1)$ e $Q = (2, 1)$ sono coniugati rispetto a $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $k = 10$ **(pt.1)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la conica $\mathcal{C}_k$ è un'iperbole equilatera.

  Risposta $\nexists k$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 4. Nello spazio euclideo $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino i punti $A = (1, 2, -1)$ e $B = (2, 0, 1)$. Si determinino delle equazioni cartesiane dei seguenti enti:

- il piano π sul quale giace la retta AB e parallelo all'asse y;

  Risposta $2x - z - 3 = 0$ **(pt.2)**

- i piani α e β perpendicolari alla retta AB e distanti 2 da B;

  Risposta $x - 2y + 2z - 10 = 0$, $x - 2y + 2z + 2 = 0$ **(pt.2)**

- la sfera passante per i punti A e B e con centro sulla retta AB.

  Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 2y + 1 = 0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} :\ x^2 - 4z^2 + 2x + 2y - 4z - 6 = 0$ precisando la natura dei suoi punti semplici.

Risposta Paraboloide iperbolico **(pt.4)**

Si riconoscano la sezioni di $\mathcal{Q}$ ottenute con i piani $\alpha :\ x = 0$ e $\beta :\ y - 2z = 0$.

Risposta $\mathcal{Q} \cap \alpha$: parabola, $\mathcal{Q} \cap \beta$: iperbole **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 09/2/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} (k+1)x + y + 2z = 0 \\ x - ky + kz = 0 \\ 4x + (-k-1)y + (k-2)z = 0 \\ 3x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

- Se ne discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile;
  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; se $k \neq 0, -4$ soluzione unica, $k = 0, -4$ ∞^1 soluzioni **(pt.3)**
- Si indichino i valori del parametro k per i quali la terna $(0, -4, 2)$ è soluzione del sistema;
  Risposta $k = 0$ **(pt.1)**
- Posto $k = 0$, sia S l'insieme delle soluzioni del sistema. Si dica se S è un sottospazio di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$. Si scrivano: una base di un complemento diretto D di S e una base del complemento ortogonale $S^\perp$ di S rispetto al prodotto scalare euclideo.
  Risposta S è sottospazio di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ perché il sistema è omogeneo; $\mathcal{B}_D = ((1,0,0),(0,1,0))$, $\mathcal{B}_{S^\perp} = ((1,0,0),(0,1,2))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2 & k+3 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & k-1 & -1 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- i valori di k per i quali il vettore $(-3, 2, -5)$ è un autovettore di A_k. Si indichi l'autovalore relativo a tale autovettore;
  Risposta $k = 0,\ \lambda = 0$ **(pt.1)**
- i valori di k per i quali la matrice è diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq 2, -1$ **(pt.2)**
- posto $k = 1$, una matrice diagonale D simile ad A_1 e la relativa matrice diagonalizzante P.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k :\ x^2 + y^2 - kxy - 6x + 2y + 2 = 0$, dove k è un parametro reale. Si determinino, se esistono:

- un'equazione cartesiana del luogo dei centri delle coniche di $\mathcal{C}_k$. Si riconosca tale luogo;
  Risposta $x^2 - y^2 - 3x - y = 0$, iperbole **(pt.3)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali i punti $P = (1, 0)$ e $Q = (0, 2)$ sono coniugati rispetto a $\mathcal{C}_k$;
  Risposta $k = 1$ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la conica $\mathcal{C}_k$ è un'iperbole equilatera.
  Risposta $\nexists k$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 4. Nello spazio euclideo $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino i punti $A = (-1, 1, 2)$ e $B = (1, 2, 0)$. Si determinino delle equazioni cartesiane dei seguenti enti:

- il piano π sul quale giace la retta AB e parallelo all'asse z;
  Risposta $x - 2y + 3 = 0$ **(pt.2)**
- i piani α e β perpendicolari alla retta AB e distanti 4 da B;
  Risposta $2x + y - 2z + 8 = 0,\ 2x + y - 2z - 16 = 0$ **(pt.2)**
- la sfera passante per i punti A e B e con centro sulla retta AB.
  Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 3y - 2z + 1 = 0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} :\ x^2 - y^2 + 2xz + 2yz + 2z = 0$ precisando la natura dei suoi punti semplici.
Risposta Paraboloide iperbolico **(pt.4)**

Si riconoscano la sezioni di $\mathcal{Q}$ ottenute con i piani $\alpha :\ y = 0$ e $\beta :\ y - z = 0$.
Risposta $\mathcal{Q} \cap \alpha$: iperbole, $\mathcal{Q} \cap \beta$: parabola **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 09/2/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema
$$\begin{cases} 2kx + z = 0 \\ x + ky - 2z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \\ 2x + (k-1)y + z = 0 \end{cases}$$

- Se ne discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile;
  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; se $k \neq 1, -\frac{1}{6}$ soluzione unica, $k = 1, -\frac{1}{6}$ ∞^1 soluzioni ________ **(pt.3)**
- Si indichino i valori del parametro k per i quali la terna $(3, 6, 1)$ è soluzione del sistema;
  Risposta $k = -\frac{1}{6}$ ________ **(pt.1)**
- Posto $k = 1$, sia S l'insieme delle soluzioni del sistema. Si dica se S è un sottospazio di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$. Si scrivano: una base di un complemento diretto D di S e una base del complemento ortogonale $S^\perp$ di S rispetto al prodotto scalare euclideo.
  Risposta S è sottospazio di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ perché il sistema è omogeneo; $\mathcal{B}_D = ((1,0,0),(0,1,0))$, $\mathcal{B}_{S^\perp} = ((5,1,0),(2,0,1))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ k-1 & k & k+1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- i valori di k per i quali il vettore $(1, 0, 0)$ è un autovettore di A_k. Si indichi l'autovalore relativo a tale autovettore;
  Risposta $k = 1,\ \lambda = 1$ ________ **(pt.1)**
- i valori di k per i quali la matrice è diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq 2$ ________ **(pt.2)**
- posto $k = 4$, una matrice diagonale D simile ad A_4 e la relativa matrice diagonalizzante P.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -11 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k :\ 3x^2 + y^2 + 2kxy - 2kx - 4y + 4 = 0$, dove k è un parametro reale. Si determinino, se esistono:

- un'equazione cartesiana del luogo dei centri delle coniche di $\mathcal{C}_k$. Si riconosca tale luogo;
  Risposta $3x^2 - y^2 + 3y - 2 = 0$, iperbole ________ **(pt.3)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali i punti $P = (2, 0)$ e $Q = (1, 1)$ sono coniugati rispetto a $\mathcal{C}_k$;
  Risposta $k = 8$ ________ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la conica $\mathcal{C}_k$ è un'iperbole equilatera.
  Risposta $\nexists k$ ________ **(pt.1)**

ESERCIZIO 4. Nello spazio euclideo $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino i punti $A = (2, 0, 1)$ e $B = (-1, 4, 1)$. Si determinino delle equazioni cartesiane dei seguenti enti:

- il piano π sul quale giace la retta AB e parallelo all'asse z;
  Risposta $4x + 3y - 8 = 0$ ________ **(pt.2)**
- i piani α e β perpendicolari alla retta AB e distanti 2 da B;
  Risposta $3x - 4y + 29 = 0,\ 3x - 4y + 9 = 0$ ________ **(pt.2)**
- la sfera passante per i punti A e B e con centro sulla retta AB.
  Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - x - 4y - 2z - 1 = 0$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} :\ x^2 - 4z^2 + 2x + 2y - 4z - 6 = 0$ precisando la natura dei suoi punti semplici.

Risposta Paraboloide iperbolico ________ **(pt.4)**

Si riconoscano la sezioni di $\mathcal{Q}$ ottenute con i piani $\alpha :\ x = 0$ e $\beta :\ y - 2z = 0$.

Risposta $\mathcal{Q} \cap \alpha$: parabola, $\mathcal{Q} \cap \beta$: iperbole ________ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 09/2/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} 5x - y + kz = 0 \\ 2x - ky - z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ x + (k-1)y + 2z = 0 \end{cases}$$

- Se ne discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile;

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; se $k \neq 0, \frac{7}{3}$ soluzione unica, $k = 0, \frac{7}{3}$ ∞^1 soluzioni **(pt.3)**
- Si indichino i valori del parametro k per i quali la terna $(2, 3, -3)$ è soluzione del sistema;

  Risposta $k = \frac{7}{3}$ **(pt.1)**
- Posto $k = 0$, sia S l'insieme delle soluzioni del sistema. Si dica se S è un sottospazio di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$. Si scrivano: una base di un complemento diretto D di S e una base del complemento ortogonale $S^\perp$ di S rispetto al prodotto scalare euclideo.

  Risposta S è sottospazio di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ perché il sistema è omogeneo; $\mathcal{B}_D = ((1,0,0),(0,1,0))$, $\mathcal{B}_{S^\perp} = ((-5,1,0),(-2,0,1))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ k & k-1 & k+1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- i valori di k per i quali il vettore $(1, -14, 2)$ è un autovettore di A_k. Si indichi l'autovalore relativo a tale autovettore;

  Risposta $k = 4$, $\lambda = 2$ **(pt.1)**
- i valori di k per i quali la matrice è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq 3, 2$ **(pt.2)**
- posto $k = -1$, una matrice diagonale D simile ad A_{-1} e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k : \ x^2 + y^2 + 2kxy + 6x - 2y + 1 = 0$, dove k è un parametro reale. Si determinino, se esistono:

- un'equazione cartesiana del luogo dei centri delle coniche di $\mathcal{C}_k$. Si riconosca tale luogo;

  Risposta $x^2 - y^2 + 3x + y = 0$, iperbole **(pt.3)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali i punti $P = (0, 2)$ e $Q = (1, 0)$ sono coniugati rispetto a $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $k = -1$ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la conica $\mathcal{C}_k$ è un'iperbole equilatera.

  Risposta $\nexists k$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 4. Nello spazio euclideo $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino i punti $A = (1, 0, -1)$ e $B = (2, 2, 1)$. Si determinino delle equazioni cartesiane dei seguenti enti:

- il piano π sul quale giace la retta AB e parallelo all'asse y;

  Risposta $2x - z - 3 = 0$ **(pt.2)**
- i piani α e β perpendicolari alla retta AB e distanti 5 da B;

  Risposta $x + 2y + 2z + 7 = 0$, $x + 2y + 2z - 23 = 0$ **(pt.2)**
- la sfera passante per i punti A e B e con centro sulla retta AB.

  Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 2y + 1 = 0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} : \ x^2 + 2y^2 + 2xy + 2yz + z^2 - 6y = 0$ precisando la natura dei suoi punti semplici.

Risposta Paraboloide ellittico **(pt.4)**

Si riconoscano la sezioni di $\mathcal{Q}$ ottenute con i piani $\alpha : \ x = 0$ e $\beta : \ x + y = 0$.

Risposta $\mathcal{Q} \cap \alpha$: ellisse, $\mathcal{Q} \cap \beta$: parabola **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 09/2/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x - 2y + kz = 0 \\ kx - 2y + z = 0 \\ x - 3y - z = 0 \\ (k-1)x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

- Se ne discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile;

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; se $k \neq -1, 1$ soluzione unica, $k = -1, 1$ ∞^1 soluzioni **(pt.3)**
- Si indichino i valori del parametro k per i quali la terna $(4, 0, 4)$ è soluzione del sistema;

  Risposta $k = -1$ **(pt.1)**
- Posto $k = 1$, sia S l'insieme delle soluzioni del sistema. Si dica se S è un sottospazio di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$. Si scrivano: una base di un complemento diretto D di S e una base del complemento ortogonale $S^\perp$ di S rispetto al prodotto scalare euclideo.

  Risposta S è sottospazio di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ perché il sistema è omogeneo; $\mathcal{B}_D = ((0,1,0),(0,0,1))$, $\mathcal{B}_{S^\perp} = ((1,0,5),(0,1,2))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k-3 & k & k+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- i valori di k per i quali il vettore $(5, 3, 6)$ è un autovettore di A_k. Si indichi l'autovalore relativo a tale autovettore;

  Risposta $k = 1, \ \lambda = 1$ **(pt.1)**
- i valori di k per i quali la matrice è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq 3, 4$ **(pt.2)**
- posto $k = 0$, una matrice diagonale D simile ad A_0 e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k: \ kx^2 - (k+1)y^2 + 2xy + 4x + 4y + 4 = 0$, dove k è un parametro reale. Si determinino, se esistono:

- un'equazione cartesiana del luogo dei centri delle coniche di $\mathcal{C}_k$. Si riconosca tale luogo;

  Risposta $x^2 + y^2 - xy + 2x + 2y = 0$, ellisse **(pt.3)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali i punti $P = (2, 0)$ e $Q = (-1, 0)$ sono coniugati rispetto a $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $k = 3$ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la conica $\mathcal{C}_k$ è un'iperbole equilatera.

  Risposta $\nexists k$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 4. Nello spazio euclideo $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino i punti $A = (1, -3, 3)$ e $B = (1, 1, 0)$. Si determinino delle equazioni cartesiane dei seguenti enti:

- il piano π sul quale giace la retta AB e parallelo all'asse x;

  Risposta $3y + 4z - 3 = 0$ **(pt.2)**
- i piani α e β perpendicolari alla retta AB e distanti 1 da B;

  Risposta $4y - 3z - 9 = 0, \ 4y - 3z + 1 = 0$ **(pt.2)**
- la sfera passante per i punti A e B e con centro sulla retta AB.

  Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 3z - 2 = 0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}: \ x^2 + y^2 + 2xz + 2yz + 2z^2 + 2y = 0$ precisando la natura dei suoi punti semplici.

Risposta Paraboloide ellittico **(pt.4)**

Si riconoscano la sezioni di $\mathcal{Q}$ ottenute con i piani $\alpha: \ z = 0$ e $\beta: \ x + z = 0$.

Risposta $\mathcal{Q} \cap \alpha$: ellisse, $\mathcal{Q} \cap \beta$: parabola **(pt.2)**