UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 4^o appello - 10.06.2014

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 2k \\ k-1 & 0 & k^2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} -2 \\ k \end{pmatrix}$ e $X = {}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$, dove $k \in \mathbb{R}$. Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema lineare $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni quando risulta compatibile.

Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$, ∞^1 soluzioni **(pt.3)**

Posto $k = 0$, si determini, se esiste, l'insieme S delle soluzioni e si determini $\mathcal{L}(S)$ e la sua dimensione.

Risposta $S = \{(0, -2, t) \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{L}(S)$= $\mathcal{L}((0, -2, 0), (0, 0, 1))$ e ha dim 2 **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} k+2 & k \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e si determinino i valori di k per i quali A_k risulta ortogonalmente diagonalizzabile giustificando la risposta.

Risposta $k = -1$, unico valore per il quale la matrice è simmetrica **(pt.2)**

Per tali valori si determini una matrice ortogonale che la diagonalizza.

Risposta $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determini l'unica retta reale passante per $P = [(1, -i, 0, 0)]$ e l'unica retta reale del piano $\alpha : x + iy + z = 1 - i$.

Risposta $x_3 = x_4 = 0$, $x + z - 1 = y + 1 = 0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana del piano passante per $P = (1, 1, 1)$ e parallelo alle rette $r : x - z = y - z + 1 = 0$ e $s : 2x - z = x - y - 2 = 0$.

Risposta $x = y$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 5. In $A_3(\mathbb{R})$ si determini una base dello spazio di traslazione del piano α passante per la retta $r : \begin{cases} \text{x=1+2t} \\ \text{y=2-t} \\ \text{z=1+t} \end{cases}$ e ortogonale al piano $\gamma : x - 2y + z = 2$.

Risposta $B = ((2, -1, 1), (1, -2, 1))$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{A}_2(\mathbb{C})$ si consideri l'insieme di coniche $\mathcal{I}_k$: $kx^2 + (k-1)xy + y^2 - x - y = 0$. Si determinino i valori di k per i quali:

- $\mathcal{I}_k$ è una parabola; **Risposta** $k = 3 \pm 2\sqrt{2}$ **(pt.1)**
- $\mathcal{I}_k$ è una circonferenza; **Risposta** $k = 1$ **(pt.1)**
- $\mathcal{I}_k$ è un'iperbole equilatera; **Risposta** $k = -1$ **(pt.1)**
- $\mathcal{I}_k$ ha un asintoto parallelo alla retta $r : 2x + y - 2 = 0$; **Risposta** $k = 6$ **(pt.2)**
- $\mathcal{I}_k$ ammette i punti $R = (1, 0)$ e $S = (-1, -1)$ coniugati. **Risposta** $k = 2/3$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si stabilisca se il piano improprio è tangente alla quadrica $Q : x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2x - 3y + 4z + 2 = 0$, giustificando la risposta,

Risposta sì perché è un paraboloide **(pt.2)**

e se ne determini il punto di tangenza.

Risposta $[(1, -1, 0, 0)]$ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 4^o appello - 10.06.2014

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 2k & -1 & 0 \\ 0 & k & k-2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k-1 \\ k \end{pmatrix}$ e $X = {}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$, dove $k \in \mathbb{R}$. Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema lineare $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni quando risulta compatibile.

Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$, ∞^1 soluzioni ______ **(pt.3)**

Posto $k = 0$, si determini, se esiste, l'insieme S delle soluzioni e si determini $\mathcal{L}(S)$ e la sua dimensione.

Risposta $S = \{(h, 1, 0) \in \mathbb{R}^3, h \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{L}(S)$= $\mathcal{L}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ e ha dim 2 ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} k+3 & 1 \\ k+2 & 2 \end{pmatrix}$ e si determinino i valori di k per i quali A_k risulta ortogonalmente diagonalizzabile giustificando la risposta.

Risposta $k = -1$, unico valore per il quale la matrice è simmetrica ______ **(pt.2)**

Per tali valori si determini una matrice ortogonale che la diagonalizza.

Risposta $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determini l'unica retta reale passante per $P = [(0, 2-i, 3, 0)]$ e l'unica retta reale del piano $\alpha : 2ix - y + iz = i - 1$.

Risposta $x_1 = x_4 = 0$, $y - 1 = 2x + z - 1 = 0$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana del piano passante per $P = (-1, 3, -2)$ e parallelo alle rette $r : x - 2z + 1 = y + z = 0$ e $s : x - 2z = 2z - 4 = 0$.

Risposta $x - 2z - 3 = 0$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 5. In $A_3(\mathbb{R})$ si determini una base dello spazio di traslazione del piano α passante per la retta $r : \begin{cases} \text{x=-t} \\ \text{y=0} \\ \text{z=4+3t} \end{cases}$ e ortogonale al piano $\gamma : x + 2y + z - 1 = 0$.

Risposta $B = ((-1, 0, 3), (1, 2, 1))$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{A}_2(\mathbb{C})$ si consideri l'insieme di coniche $\mathcal{I}_k$: $2kx^2 + 2(k-2)xy - 4y^2 + 2x + 1 = 0$. Si determinino i valori di k per i quali:

- $\mathcal{I}_k$ è una parabola; **Risposta** $k = -2$ ______ **(pt.1)**
- $\mathcal{I}_k$ è una circonferenza; **Risposta** per nessun valore di k ______ **(pt.1)**
- $\mathcal{I}_k$ è un'iperbole equilatera; **Risposta** $k = 2$ ______ **(pt.1)**
- $\mathcal{I}_k$ ha un asintoto parallelo alla retta $r : x - 2y + 1 = 0$; **Risposta** $k = 1$ ______ **(pt.2)**
- $\mathcal{I}_k$ ammette i punti $R = (1, 0)$ e $S = (0, 1)$ coniugati. **Risposta** $k = 0$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si stabilisca se il piano improprio è tangente alla quadrica $Q : x^2+y^2+z^2-2xz-x+y+1 = 0$, giustificando la risposta,

Risposta sì perché è un paraboloide ______ **(pt.2)**

e se ne determini il punto di tangenza.

Risposta $[(1, 0, 1, 0)]$ ______ **(pt.2)**