UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 3^o appello - 14.04.2014

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4k \\ 0 & k & -1 \\ 1 & k+2 & 2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2k \end{pmatrix}$ e $X = {}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$, dove $k \in \mathbb{R}$. Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema lineare $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni quando risulta compatibile.

Risposta Compatibile per $k \neq -1/4$; $k \neq 1, -1/4$, esiste una sola soluzione, $k = 1$, ∞^1 soluzioni **(pt.3)**

Interpretando x, y, z come coordinate di $E_3(\mathbb{R})$ si dica per quali valori di k il piano α rappresentato dalla prima equazione e la retta rappresentata dal sistema costituito dalla seconda e dalla terza equazione risultano paralleli.

Risposta $k = 1, -1/4$ **(pt.2)**

Posto ora $k = 0$, si determini la proiezione ortogonale della retta r su α.

Risposta $x + y = 0 = z$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U = \mathcal{L}(\{(1,3,1,3),(1,0,1,0)\})$ e $W = \mathcal{L}(\{(0,3,0,2),(0,2,0,3)\})$. Si determinino:

- una base B di $U + W$ e la base B' ottenuta ortonormalizzando B;

  Risposta $B = ((1,0,1,0),(0,3,0,2),(0,2,0,3))$,
  $B' = ((1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}, 0), (0, 3/\sqrt{13}, 0, 2/\sqrt{13}), (0, -2/\sqrt{13}, 0, 3/\sqrt{13}))$ **(pt.3)**

- le componenti di $v = (\sqrt{2}, 5, \sqrt{2}, -1)$ rispetto a B';

  Risposta $(2, \sqrt{13}, -\sqrt{13})$ **(pt.2)**

- un complemento diretto di $U + W$.

  Risposta $\mathcal{L}(\{(1,0,0,0)\})$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ e se ne determinino gli autovalori e i relativi autospazi.

Risposta $\lambda = 1$, $V_1 = \{(x, y, y, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
$\lambda = 5$, $V_5 = \{(3y, -y, 3y, 2y) \in \mathbb{R}^4 \mid y \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

Si dica, motivando la risposta, se la matrice A è diagonalizzabile.

Risposta La matrice A non è diagonalizzabile poiché l'autovalore 1 non è regolare **(pt.1)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 2xy + 6x - 6y - 2 = 0$ e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, assi, asintoti e vertici.

Risposta Parabola, $C = [(1, -1, 0)]$, asse: $x + y = 0$, $V = (1/6, -1/6)$, non ha asintoti **(pt.4)**

Si determinino le tangenti a $\mathcal{C}$ nei suoi vertici.

Risposta $3x - 3y - 1 = 0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana della superficie Σ generata dalla retta $r : x - 2 = 0 = y - 2z + 2$ nella rotazione di asse $a : x = 0 = y + z - 1$.

Risposta $x^2 - 4y^2 - 4z^2 + 10yz - 10y + 8z - 8 = 0$ **(pt.4)**

Si riconosca Σ e si determini la natura dei suoi punti semplici.

Risposta Iperboloide iperbolico **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - **Algebra ed Elementi di Geometria** - 3^o appello - 14.04.2014

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 2k & -1 & 1 \\ 2 & 0 & k \\ 3 & 1 & k-1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ -1/2 \end{pmatrix}$ e $X = {}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$, dove $k \in \mathbb{R}$. Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema lineare $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni quando risulta compatibile.

Risposta Compatibile per $k \neq 0$; $k \neq 0, -1/2$, esiste una sola soluzione, $k = -1/2$, ∞^1 soluzioni **(pt.3)**

Interpretando x, y, z come coordinate di $E_3(\mathbb{R})$ si dica per quali valori di k il piano α rappresentato dalla prima equazione e la retta rappresentata dal sistema costituito dalla seconda e dalla terza equazione risultano paralleli.

Risposta $k = 0, -1/2$ **(pt.2)**

Posto ora $k = 0$, si determini la proiezione ortogonale della retta r su α.

Risposta $x = 0 = y - z$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U = \mathcal{L}(\{(-7,-2,3,-1),(0,2,0,1)\})$ e $W = \mathcal{L}(\{(5,0,-1,0), (1,0,-5,0)\})$. Si determinino:

- una base B di $U + W$ e la base B' ottenuta ortonormalizzando B;

  Risposta $B = ((0,2,0,1),(5,0,-1,0),(1,0,-5,0))$,
  $B' = ((0, 2/\sqrt{5}, 0, 1/\sqrt{5}), (5/\sqrt{26}, 0, -1/\sqrt{26}, 0), (1/\sqrt{26}, 0, 5/\sqrt{26}, 0))$ **(pt.3)**

- le componenti di $v = (-4, 2\sqrt{5}, 6, \sqrt{5})$ rispetto a B';

  Risposta $(5, -\sqrt{26}, \sqrt{26})$ **(pt.2)**

- un complemento diretto di $U + W$.

  Risposta $\mathcal{L}(\{(0,1,0,0)\})$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ -6 & 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ e se ne determinino gli autovalori e i relativi autospazi.

Risposta $\lambda = 2$, $V_2 = \{(x, 4x, x, -11x) \in \mathbb{R}^4 \mid x \in \mathbb{R}\}$
$\lambda = 4$, $V_4 = \{(0,0,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid z, t \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

Si dica, motivando la risposta, se la matrice A è diagonalizzabile.

Risposta La matrice A non è diagonalizzabile poiché l'autovalore 4 non è regolare **(pt.1)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2xy + 10x + 10y - 25 = 0$ e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, assi, asintoti e vertici.

Risposta Parabola, $C = [(1,1,0)]$, asse: $x - y = 0$, $V = (5/4, 5/4)$, non ha asintoti **(pt.4)**

Si determinino le tangenti a $\mathcal{C}$ nei suoi vertici.

Risposta $2x + 2y - 5 = 0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana della superficie Σ generata dalla retta $r : x - 2z + 2 = 0 = y - 1$ nella rotazione di asse $a : x + z - 1 = 0 = y$.

Risposta $4x^2 - y^2 + 4z^2 - 10xz + 10x - 8z + 5 = 0$ **(pt.4)**

Si riconosca Σ e si determini la natura dei suoi punti semplici.

Risposta Iperboloide iperbolico **(pt.2)**