

## UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - 1° appello - 15/01/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

**ESERCIZIO 1.** Si considerino le matrici  $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k+1 \\ 0 & k & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2k \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , dove  $k$  è un parametro reale.

- Si discuta, al variare di  $k \in \mathbb{R}$ , la risolubilità del sistema  $A_k X = B_k$ , precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile;

**Risposta** Compatibile per  $k \neq -2$ ;  $k \neq -2, 1$ , soluz. unica,  $k = 1$ ,  $\infty^1$  soluzioni \_\_\_\_\_ (pt.3)

- interpretando  $x, y, z$  come coordinate in  $E_3(\mathbb{R})$  si dica qual è al variare di  $k \in \mathbb{R}$  la mutua posizione della retta  $r_k$  rappresentata dalle prime due equazioni del sistema e del piano  $\pi_k$  rappresentato dalla terza equazione.

**Risposta**  $k \neq -2, 1$ ,  $r, \pi$  incidenti,  $k = -2$ ,  $r, \pi$  paralleli e disgiunti,  $k = 1$ ,  $r \subseteq \pi$  \_\_\_\_\_ (pt.3)

**ESERCIZIO 2.** In  $M_3(\mathbb{R})$  è data la matrice  $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k-3 & k & 2 \\ 0 & 2 & k \end{pmatrix}$ , dove  $k$  è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di  $k \in \mathbb{R}$  per i quali la matrice  $A_k$  è diagonalizzabile;

**Risposta**  $k \neq -1$  \_\_\_\_\_ (pt.3)

- i valori di  $k \in \mathbb{R}$  per cui  $A_k$  è ortogonalmente diagonalizzabile;

**Risposta**  $k = 3$  \_\_\_\_\_ (pt.2)

- posto  $k = 3$  si determini una matrice diagonale  $D$  simile a  $A_3$  e, se possibile, una matrice diagonalizzante  $P$  ortogonale; nel caso non sia possibile si giustifichi la risposta.

**Risposta**  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$   $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$  \_\_\_\_\_ (pt.3)

**ESERCIZIO 3.** Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$  si consideri il sottospazio

$$W = \{(a + b + 3c, b + 2c + d, a - b - c - 2d, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

- Si determini una base del sottospazio  $W$ ;

**Risposta**  $\mathcal{B} = ((1, 0, 1, 0), (1, 1, -1, 0))$  \_\_\_\_\_ (pt.2)

- Si determini la dimensione di un complemento diretto di  $W$ .

**Risposta** 2 \_\_\_\_\_ (pt.1)

**ESERCIZIO 4.** In  $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$  si riconosca la conica  $\mathcal{C} : x^2 + 2xy - 2y + 2 = 0$  e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, direzioni degli assi e fascio dei diametri.

**Risposta** Iperbole,  $C = (1, -1)$ ,  $[(1 \pm \sqrt{5}, 2, 0)]$ ,  $\lambda(x + y) + \mu(x - 1) = 0$ ,  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  \_\_\_\_\_ (pt.4)

Si determinino le coordinate del polo della retta  $r : x - y - 2 = 0$  rispetto alla conica  $\mathcal{C}$ .

**Risposta**  $P_\infty = [(1, -2, 0)]$  \_\_\_\_\_ (pt.2)

**ESERCIZIO 5.** In  $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$  si riconosca la quadrica  $\mathcal{Q} : x^2 - 2xy - z^2 + 4y + 1 = 0$ .

**Risposta** Iperboloide iperbolico \_\_\_\_\_ (pt.2)

Si riconosca la sezione della quadrica  $\mathcal{Q}$  con il piano  $\pi : x + y = 0$ , precisando nel caso in cui la sezione sia riducibile una rappresentazione cartesiana delle rette che la compongono;

**Risposta** Iperbole \_\_\_\_\_ (pt.2)

Si determini un'equazione cartesiana della retta proiezione ortogonale di  $r : x + 2y - 1 = 0 = x + y - z - 2$  sul piano  $\pi$ .

**Risposta**  $x + y = 0 = x - y - 3z - 4$  \_\_\_\_\_ (pt.3)

## UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - 1° appello - 15/01/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

**ESERCIZIO 1.** Si considerino le matrici  $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & k \\ k-1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2k \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , dove  $k$  è un parametro reale.

- Si discuta, al variare di  $k \in \mathbb{R}$ , la risolubilità del sistema  $A_k X = B_k$ , precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile;

**Risposta** Compatibile per  $k \neq 0$ ;  $k \neq -1, 0$ , soluz. unica,  $k = -1$ ,  $\infty^1$  soluzioni \_\_\_\_\_ (pt.3)

- interpretando  $x, y, z$  come coordinate in  $E_3(\mathbb{R})$  si dica qual è al variare di  $k \in \mathbb{R}$  la mutua posizione della retta  $r_k$  rappresentata dalle prime due equazioni del sistema e del piano  $\pi_k$  rappresentato dalla terza equazione.

**Risposta**  $k \neq -1, 0$ ,  $r, \pi$  incidenti,  $k = 0$ ,  $r, \pi$  paralleli e disgiunti,  $k = -1$ ,  $r \subseteq \pi$  \_\_\_\_\_ (pt.3)

**ESERCIZIO 2.** In  $M_3(\mathbb{R})$  è data la matrice  $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & k+1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ , dove  $k$  è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di  $k \in \mathbb{R}$  per i quali la matrice  $A_k$  è diagonalizzabile;

**Risposta**  $\forall k \in \mathbb{R}$  \_\_\_\_\_ (pt.3)

- i valori di  $k \in \mathbb{R}$  per cui  $A_k$  è ortogonalmente diagonalizzabile;

**Risposta**  $\forall k \in \mathbb{R}$  \_\_\_\_\_ (pt.2)

- posto  $k = 4$  si determini una matrice diagonale  $D$  simile a  $A_4$  e, se possibile, una matrice diagonalizzante  $P$  ortogonale; nel caso non sia possibile si giustifichi la risposta.

**Risposta**  $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$   $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$  \_\_\_\_\_ (pt.3)

**ESERCIZIO 3.** Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$  si consideri il sottospazio

$$W = \{(a + b + 3c, b + 2c - 2d, a - b - c - 2d, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

- Si determini una base del sottospazio  $W$ ;

**Risposta**  $\mathcal{B} = ((1, 0, 1, 0), (1, 1, -1, 0), (0, -2, -2, 0))$  \_\_\_\_\_ (pt.2)

- Si determini la dimensione di un complemento diretto di  $W$ .

**Risposta** 1 \_\_\_\_\_ (pt.1)

**ESERCIZIO 4.** In  $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$  si riconosca la conica  $\mathcal{C} : 3x^2 + y^2 - 4y + 1 = 0$  e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, direzioni degli assi e fascio dei diametri.

**Risposta** Ellisse,  $C = (0, 2)$ ,  $[(1, 0, 0)], [(0, 1, 0)]$   $\lambda x + \mu(y - 2) = 0$ ,  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  \_\_\_\_\_ (pt.4)

Si determinino le coordinate del polo della retta  $r : x + y - 2 = 0$  rispetto alla conica  $\mathcal{C}$ .

**Risposta**  $P_\infty = [(1, 3, 0)]$  \_\_\_\_\_ (pt.2)

**ESERCIZIO 5.** In  $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$  si riconosca la quadrica  $\mathcal{Q} : x^2 + 4y^2 - z^2 - 6z = 0$ .

**Risposta** Iperboloide ellittico \_\_\_\_\_ (pt.2)

Si riconosca la sezione della quadrica  $\mathcal{Q}$  con il piano  $\pi : y - z = 0$ , precisando nel caso in cui la sezione sia riducibile una rappresentazione cartesiana delle rette che la compongono;

**Risposta** Ellisse \_\_\_\_\_ (pt.2)

Si determini un'equazione cartesiana della retta proiezione ortogonale di  $r : x + 2y - z - 4 = 0 = 2x + y - 3$  sul piano  $\pi$ .

**Risposta**  $y - z = 0 = 5x + y + z - 5$  \_\_\_\_\_ (pt.3)

## UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - 1° appello - 15/01/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

**ESERCIZIO 1.** Si considerino le matrici  $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & k-1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2k-2 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , dove  $k$  è un parametro reale.

- Si discuta, al variare di  $k \in \mathbb{R}$ , la risolubilità del sistema  $A_k X = B_k$ , precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile;

**Risposta** Compatibile per  $k \neq -1$ ;  $k \neq -1, 2$ , soluz. unica,  $k = 2$ ,  $\infty^1$  soluzioni \_\_\_\_\_ (pt.3)

- interpretando  $x, y, z$  come coordinate in  $E_3(\mathbb{R})$  si dica qual è al variare di  $k \in \mathbb{R}$  la mutua posizione della retta  $r_k$  rappresentata dalle prime due equazioni del sistema e del piano  $\pi_k$  rappresentato dalla terza equazione.

**Risposta**  $k \neq -1, 2$ ,  $r, \pi$  incidenti,  $k = -1$ ,  $r, \pi$  paralleli e disgiunti,  $k = 2$ ,  $r \subseteq \pi$  \_\_\_\_\_ (pt.3)

**ESERCIZIO 2.** In  $M_3(\mathbb{R})$  è data la matrice  $A_k = \begin{pmatrix} k & k-4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & k \end{pmatrix}$ , dove  $k$  è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di  $k \in \mathbb{R}$  per i quali la matrice  $A_k$  è diagonalizzabile;

**Risposta**  $k \neq 0$  \_\_\_\_\_ (pt.3)

- i valori di  $k \in \mathbb{R}$  per cui  $A_k$  è ortogonalmente diagonalizzabile;

**Risposta**  $k = 4$  \_\_\_\_\_ (pt.2)

- posto  $k = 4$  si determini una matrice diagonale  $D$  simile a  $A_4$  e, se possibile, una matrice diagonalizzante  $P$  ortogonale; nel caso non sia possibile si giustifichi la risposta.

**Risposta**  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$   $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$  \_\_\_\_\_ (pt.3)

**ESERCIZIO 3.** Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$  si consideri il sottospazio

$$W = \{(2a + b + 3c + d, b - c - d, a + b + c, -b + c + d) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

- Si determini una base del sottospazio  $W$ ;

**Risposta**  $\mathcal{B} = ((2, 0, 1, 0), (1, 1, 1, -1))$  \_\_\_\_\_ (pt.2)

- Si determini la dimensione di un complemento diretto di  $W$ .

**Risposta** 2 \_\_\_\_\_ (pt.1)

**ESERCIZIO 4.** In  $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$  si riconosca la conica  $\mathcal{C} : 3x^2 - 2xy + 2x + y - 1 = 0$  e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, direzioni degli assi e fascio dei diametri.

**Risposta** Iperbole,  $C = (1/2, 5/2)$ ,  $[(-3 \pm \sqrt{13}, 2, 0)]$ ,  $\lambda(3x - y + 1) + \mu(2x - 1) = 0$ ,  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  (pt.4)

Si determinino le coordinate del polo della retta  $r : x - y + 2 = 0$  rispetto alla conica  $\mathcal{C}$ .

**Risposta**  $P_\infty = [(1, 2, 0)]$  \_\_\_\_\_ (pt.2)

**ESERCIZIO 5.** In  $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$  si riconosca la quadrica  $\mathcal{Q} : x^2 - 2xy - z^2 + 4y + 1 = 0$ .

**Risposta** Iperboloide iperbolico \_\_\_\_\_ (pt.2)

Si riconosca la sezione della quadrica  $\mathcal{Q}$  con il piano  $\pi : x - y = 0$ , precisando nel caso in cui la sezione sia riducibile una rappresentazione cartesiana delle rette che la compongono;

**Risposta** Ellisse \_\_\_\_\_ (pt.2)

Si determini un'equazione cartesiana della retta proiezione ortogonale di  $r : x + 2y - 1 = 0 = y + z + 1$  sul piano  $\pi$ .

**Risposta**  $x - y = 0 = x + y - z - 2$  \_\_\_\_\_ (pt.3)

## UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - 1° appello - 15/01/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

**ESERCIZIO 1.** Si considerino le matrici  $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & k-2 \\ k-3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2k-4 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , dove  $k$  è un parametro reale.

- Si discuta, al variare di  $k \in \mathbb{R}$ , la risolubilità del sistema  $A_k X = B_k$ , precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile;

**Risposta** Compatibile per  $k \neq 2$ ;  $k \neq 1, 2$ , soluz. unica,  $k = 1$ ,  $\infty^1$  soluzioni \_\_\_\_\_ (pt.3)

- interpretando  $x, y, z$  come coordinate in  $E_3(\mathbb{R})$  si dica qual è al variare di  $k \in \mathbb{R}$  la mutua posizione della retta  $r_k$  rappresentata dalle prime due equazioni del sistema e del piano  $\pi_k$  rappresentato dalla terza equazione.

**Risposta**  $k \neq 1, 2$ ,  $r, \pi$  incidenti,  $k = 2$ ,  $r, \pi$  paralleli e disgiunti,  $k = 1$ ,  $r \subseteq \pi$  \_\_\_\_\_ (pt.3)

**ESERCIZIO 2.** In  $M_3(\mathbb{R})$  è data la matrice  $A_k = \begin{pmatrix} 3k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ , dove  $k$  è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di  $k \in \mathbb{R}$  per i quali la matrice  $A_k$  è diagonalizzabile;

**Risposta**  $\forall k \in \mathbb{R}$  \_\_\_\_\_ (pt.3)

- i valori di  $k \in \mathbb{R}$  per cui  $A_k$  è ortogonalmente diagonalizzabile;

**Risposta**  $\forall k \in \mathbb{R}$  \_\_\_\_\_ (pt.2)

- posto  $k = 0$  si determini una matrice diagonale  $D$  simile a  $A_0$  e, se possibile, una matrice diagonalizzante  $P$  ortogonale; nel caso non sia possibile si giustifichi la risposta.

**Risposta**  $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$   $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$  \_\_\_\_\_ (pt.3)

**ESERCIZIO 3.** Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$  si consideri il sottospazio

$$W = \{(a + 2c + d, 2a + b + d, 3a + d, 4a + b + d) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

- Si determini una base del sottospazio  $W$ ;

**Risposta**  $\mathcal{B} = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$  \_\_\_\_\_ (pt.2)

- Si determini la dimensione di un complemento diretto di  $W$ .

**Risposta** 0 \_\_\_\_\_ (pt.1)

**ESERCIZIO 4.** In  $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$  si riconosca la conica  $\mathcal{C} : x^2 + xy + 2y^2 + 1 = 0$  e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, direzioni degli assi e fascio dei diametri.

**Risposta** Ellisse,  $C = (0, 0)$ ,  $[(-1 \pm \sqrt{2}, 1, 0)]$ ,  $\lambda x + \mu y = 0$ ,  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  \_\_\_\_\_ (pt.4)

Si determinino le coordinate del polo della retta  $r : x + y = 0$  rispetto alla conica  $\mathcal{C}$ .

**Risposta**  $P_\infty = [(3, 1, 0)]$  \_\_\_\_\_ (pt.2)

**ESERCIZIO 5.** In  $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$  si riconosca la quadrica  $\mathcal{Q} : x^2 + 4y^2 - z^2 - 6z = 0$ .

**Risposta** Iperboloide ellittico \_\_\_\_\_ (pt.2)

Si riconosca la sezione della quadrica  $\mathcal{Q}$  con il piano  $\pi : y - 2z = 0$ , precisando nel caso in cui la sezione sia riducibile una rappresentazione cartesiana delle rette che la compongono;

**Risposta** Ellisse \_\_\_\_\_ (pt.2)

Si determini un'equazione cartesiana della retta proiezione ortogonale di  $r : x + 2y - z - 4 = 0 = 2x + y - 3$  sul piano  $\pi$ .

**Risposta**  $y - 2z = 0 = 7x + 2y + z - 8$  \_\_\_\_\_ (pt.3)

## UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - 1° appello - 15/01/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

**ESERCIZIO 1.** Si considerino le matrici  $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k-2 \\ 0 & k-3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2k-6 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , dove  $k$  è un parametro reale.

- Si discuta, al variare di  $k \in \mathbb{R}$ , la risolubilità del sistema  $A_k X = B_k$ , precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile;

**Risposta** Compatibile per  $k \neq 1$ ;  $k \neq 1, 4$ , soluz. unica,  $k = 4$ ,  $\infty^1$  soluzioni \_\_\_\_\_ (pt.3)

- interpretando  $x, y, z$  come coordinate in  $E_3(\mathbb{R})$  si dica qual è al variare di  $k \in \mathbb{R}$  la mutua posizione della retta  $r_k$  rappresentata dalle prime due equazioni del sistema e del piano  $\pi_k$  rappresentato dalla terza equazione.

**Risposta**  $k \neq 1, 4$ ,  $r, \pi$  incidenti,  $k = 1$ ,  $r, \pi$  paralleli e disgiunti,  $k = 4$ ,  $r \subseteq \pi$  \_\_\_\_\_ (pt.3)

**ESERCIZIO 2.** In  $M_3(\mathbb{R})$  è data la matrice  $A_k = \begin{pmatrix} k+3 & 2 & 0 \\ 2 & k+3 & k \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ , dove  $k$  è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di  $k \in \mathbb{R}$  per i quali la matrice  $A_k$  è diagonalizzabile;

**Risposta**  $k \neq 4$  \_\_\_\_\_ (pt.3)

- i valori di  $k \in \mathbb{R}$  per cui  $A_k$  è ortogonalmente diagonalizzabile;

**Risposta**  $k = 0$  \_\_\_\_\_ (pt.2)

- posto  $k = 0$  si determini una matrice diagonale  $D$  simile a  $A_0$  e, se possibile, una matrice diagonalizzante  $P$  ortogonale; nel caso non sia possibile si giustifichi la risposta.

**Risposta**  $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$   $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  \_\_\_\_\_ (pt.3)

**ESERCIZIO 3.** Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$  si consideri il sottospazio

$$W = \{(3a + b + 5c + 2d, 0, a + 2b + 5c + 4d, -a + b + c + 2d) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

- Si determini una base del sottospazio  $W$ ;

**Risposta**  $\mathcal{B} = ((3, 0, 1, -1), (1, 0, 2, 1))$  \_\_\_\_\_ (pt.2)

- Si determini la dimensione di un complemento diretto di  $W$ .

**Risposta** 2 \_\_\_\_\_ (pt.1)

**ESERCIZIO 4.** In  $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$  si riconosca la conica  $\mathcal{C} : x^2 - 4xy + y^2 + 2y - 4 = 0$  e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, direzioni degli assi e fascio dei diametri.

**Risposta** Iperbole,  $C = (2/3, 1/3)$ ,  $[(1, \pm 1, 0)]$ ,  $\lambda(x - 2y) + \mu(2x - y - 1) = 0$ ,  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  \_\_\_\_\_ (pt.4)

Si determinino le coordinate del polo della retta  $r : 2x - y - 1 = 0$  rispetto alla conica  $\mathcal{C}$ .

**Risposta**  $P_\infty = [(0, 1, 0)]$  \_\_\_\_\_ (pt.2)

**ESERCIZIO 5.** In  $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$  si riconosca la quadrica  $\mathcal{Q} : x^2 - 2xy - z^2 + 4y + 1 = 0$ .

**Risposta** Iperboloide iperbolico \_\_\_\_\_ (pt.2)

Si riconosca la sezione della quadrica  $\mathcal{Q}$  con il piano  $\pi : y + z = 0$ , precisando nel caso in cui la sezione sia riducibile una rappresentazione cartesiana delle rette che la compongono;

**Risposta** Iperbole \_\_\_\_\_ (pt.2)

Si determini un'equazione cartesiana della retta proiezione ortogonale di  $r : x + 2y - 2 = 0 = y + z + 1$  sul piano  $\pi$ .

**Risposta**  $y + z = 0 = x + y - z - 3$  \_\_\_\_\_ (pt.3)

## UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - 1° appello - 15/01/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

**ESERCIZIO 1.** Si considerino le matrici  $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & k+1 \\ k & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2k+2 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , dove  $k$  è un parametro reale.

- Si discuta, al variare di  $k \in \mathbb{R}$ , la risolubilità del sistema  $A_k X = B_k$ , precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile;

**Risposta** Compatibile per  $k \neq -1$ ;  $k \neq -2, -1$ , soluz. unica,  $k = -2$ ,  $\infty^1$  soluzioni \_\_\_\_\_ (pt.3)

- interpretando  $x, y, z$  come coordinate in  $E_3(\mathbb{R})$  si dica qual è al variare di  $k \in \mathbb{R}$  la mutua posizione della retta  $r_k$  rappresentata dalle prime due equazioni del sistema e del piano  $\pi_k$  rappresentato dalla terza equazione.

**Risposta**  $k \neq -2, -1$ ,  $r, \pi$  incidenti,  $k = -1$ ,  $r, \pi$  paralleli e disgiunti,  $k = -2$ ,  $r \subseteq \pi$  \_\_\_\_\_ (pt.3)

**ESERCIZIO 2.** In  $M_3(\mathbb{R})$  è data la matrice  $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$ , dove  $k$  è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di  $k \in \mathbb{R}$  per i quali la matrice  $A_k$  è diagonalizzabile;

**Risposta**  $\forall k \in \mathbb{R}$  \_\_\_\_\_ (pt.3)

- i valori di  $k \in \mathbb{R}$  per cui  $A_k$  è ortogonalmente diagonalizzabile;

**Risposta**  $\forall k \in \mathbb{R}$  \_\_\_\_\_ (pt.2)

- posto  $k = 9$  si determini una matrice diagonale  $D$  simile a  $A_9$  e, se possibile, una matrice diagonalizzante  $P$  ortogonale; nel caso non sia possibile si giustifichi la risposta.

**Risposta**  $D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$   $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \\ 0 & 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  \_\_\_\_\_ (pt.3)

**ESERCIZIO 3.** Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$  si consideri il sottospazio

$$W = \{(b + 3c + 4d, a + 4b + c + 6d, 2a + 3b + 2c + 7d, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

- Si determini una base del sottospazio  $W$ ;

**Risposta**  $\mathcal{B} = ((0, 1, 2, 0), (1, 4, 3, 0), (3, 1, 2, 0))$  \_\_\_\_\_ (pt.2)

- Si determini la dimensione di un complemento diretto di  $W$ .

**Risposta** 1 \_\_\_\_\_ (pt.1)

**ESERCIZIO 4.** In  $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$  si riconosca la conica  $\mathcal{C} : 4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$  e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, direzioni degli assi e fascio dei diametri.

**Risposta** Ellisse,  $C = (-1, 2)$ ,  $[(1, 0, 0)], [(0, 1, 0)]$   $\lambda(x+1) + \mu(y-2) = 0$ ,  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  \_\_\_\_\_ (pt.4)

Si determinino le coordinate del polo della retta  $r : x + y - 1 = 0$  rispetto alla conica  $\mathcal{C}$ .

**Risposta**  $P_\infty = [(1, 4, 0)]$  \_\_\_\_\_ (pt.2)

**ESERCIZIO 5.** In  $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$  si riconosca la quadrica  $\mathcal{Q} : x^2 + 4y^2 - z^2 - 6z = 0$ .

**Risposta** Iperboloide ellittico \_\_\_\_\_ (pt.2)

Si riconosca la sezione della quadrica  $\mathcal{Q}$  con il piano  $\pi : x + y = 0$ , precisando nel caso in cui la sezione sia riducibile una rappresentazione cartesiana delle rette che la compongono;

**Risposta** Iperbole \_\_\_\_\_ (pt.2)

Si determini un'equazione cartesiana della retta proiezione ortogonale di  $r : x + 2y - z - 4 = 0 = 2x + y - 3$  sul piano  $\pi$ .

**Risposta**  $x + y = 0 = x - y + z + 1$  \_\_\_\_\_ (pt.3)