UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 4^o appello - 14/06/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	PROVA DI TEORIA ORALE ☐

ESERCIZIO 1. Sia A_k, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la matrice: $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ k+2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si indichino:

- i valori di k per i quali A_k possiede autovalori distinti;
  Risposta $k \neq \pm 1$ ________ **(pt.1A)**
- i valori di k per i quali A_k è diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq 1$ ________ **(pt.2A)**
- fissato $k = 0$, una matrice D diagonale, simile ad A_0, e una relativa matrice P diagonalizzante.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ________ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo, sia U il sottospazio $U = \{(0,\ b+c,\ 2a+c) \ : \ a,b,c \in \mathbb{R}\}$. Si determinino:

- la dimensione di U;
  Risposta $\dim U = 2$ ________ **(pt.1A)**
- una base di un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^3$;
  Risposta $\mathcal{B}_W = ((1,0,0))$ ________ **(pt.2A)**
- i valori del parametro reale k per i quali il vettore $v_k = (k-1, k-3, k+2)$ appartiene a U;
  Risposta $k = 1$ ________ **(pt.1A)**
- posto $k = 3$, una base del sottospazio $v_3^\perp$.
  Risposta $\mathcal{B}_{v_3^\perp} = ((0,1,0),(5,0,-2))$ ________ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 3. In $E_2(\mathbb{R})$, dati i punti $A = (-6;0)$ e $B = (0;2)$ si determinino:

- un'equazione cartesiana dell'asse del segmento AB;
  Risposta $3x + y + 8 = 0$ ________ **(pt.2G)**
- un'equazione cartesiana della circonferenza passante per A e B e tangente in B alla retta $t \ : \ y - 2 = 0$.
  Risposta $x^2 + (y+8)^2 = 100$ ________ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q} \ : \ x^2 + y^2 + z^2 - xy + xz + yz - 3x = 0$.

- Si riconosca $\mathcal{Q}$, precisando la natura dei suoi punti semplici.
  Risposta Paraboloide ellittico ________ **(pt.3G)**
- Si riconosca la sezione di $\mathcal{Q}$ con il piano $x - 1 = 0$.
  Risposta Ellisse ________ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 4^o appello - 14/06/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	PROVA DI TEORIA ORALE ☐

ESERCIZIO 1. Sia A_k, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la matrice: $A_k = \begin{pmatrix} k-1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ k+1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si indichino:

- i valori di k per i quali A_k possiede autovalori distinti;
  Risposta $k \neq 0, 2$ ______ **(pt.1A)**
- i valori di k per i quali A_k è diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq 2$ ______ **(pt.2A)**
- fissato $k = 3$, una matrice D diagonale, simile ad A_3, e una relativa matrice P diagonalizzante.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo, sia U il sottospazio $U = \{(2a+2b,\ a+b,\ 0)\ :\ a, b \in \mathbb{R}\}$. Si determinino:

- la dimensione di U;
  Risposta $\dim U = 1$ ______ **(pt.1A)**
- una base di un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^3$;
  Risposta $\mathcal{B}_W = ((1,0,0),(0,0,1))$ ______ **(pt.2A)**
- i valori del parametro reale k per i quali il vettore $v_k = (k, k, 0)$ appartiene a U;
  Risposta $k = 0$ ______ **(pt.1A)**
- posto $k = 2$, una base del sottospazio $v_2^{\perp}$.
  Risposta $\mathcal{B}_{v_2^{\perp}} = ((0,0,1),(1,-1,0))$ ______ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 3. In $E_2(\mathbb{R})$, dati i punti $A = (0;0)$ e $B = (4;0)$ si determinino:

- un'equazione cartesiana dell'asse del segmento AB;
  Risposta $x - 2 = 0$ ______ **(pt.2G)**
- un'equazione cartesiana della circonferenza passante per A e B e tangente in B alla retta $t\ :\ x + y - 4 = 0$.
  Risposta $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 8$ ______ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}\ :\ x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 5 = 0$.

- Si riconosca $\mathcal{Q}$, precisando la natura dei suoi punti semplici.
  Risposta Iperboloide iperbolico ______ **(pt.3G)**
- Si riconosca la sezione di $\mathcal{Q}$ con il piano $x = 0$.
  Risposta Conica riducibile nell'unione di due rette reali e distinte ______ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 4^o appello - 14/06/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	PROVA DI TEORIA ORALE ☐

ESERCIZIO 1. Sia A_k, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la matrice: $A_k = \begin{pmatrix} k-2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si indichino:

- i valori di k per i quali A_k possiede autovalori distinti;
  Risposta $k \neq 1, 3$ **(pt.1A)**
- i valori di k per i quali A_k è diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq 3$ **(pt.2A)**
- fissato $k = 5$, una matrice D diagonale, simile ad A_5, e una relativa matrice P diagonalizzante.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo, sia U il sottospazio $U = \{(2a+c,\ b+c,\ 0)\ :\ a,b,c \in \mathbb{R}\}$. Si determinino:

- la dimensione di U;
  Risposta $\dim U = 2$ **(pt.1A)**
- una base di un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^3$;
  Risposta $\mathcal{B}_W = ((0,0,1))$ **(pt.2A)**
- i valori del parametro reale k per i quali il vettore $v_k = (k+4, k-1, k+1)$ appartiene a U;
  Risposta $k = -1$ **(pt.1A)**
- posto $k = 1$, una base del sottospazio $v_1^\perp$.
  Risposta $\mathcal{B}_{v_1^\perp} = ((0,1,0), (-2,0,5))$ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 3. In $E_2(\mathbb{R})$, dati i punti $A = (-4;0)$ e $B = (0;2)$ si determinino:

- un'equazione cartesiana dell'asse del segmento AB;
  Risposta $2x + y + 3 = 0$ **(pt.2G)**
- un'equazione cartesiana della circonferenza passante per A e B e tangente in B alla retta $t\ :\ y - 2 = 0$.
  Risposta $x^2 + (y+3)^2 = 25$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}\ :\ x^2 + y^2 + z^2 - xy + xz + yz - 1 = 0$.

- Si riconosca $\mathcal{Q}$, precisando la natura dei suoi punti semplici.
  Risposta Cilindro ellittico a punti parabolici **(pt.3G)**
- Si riconosca la sezione di $\mathcal{Q}$ con il piano $x = 0$.
  Risposta Ellisse **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 4^o appello - 14/06/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	PROVA DI TEORIA ORALE ☐

ESERCIZIO 1. Sia A_k, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la matrice: $A_k = \begin{pmatrix} k+1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ k+3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si indichino:

- i valori di k per i quali A_k possiede autovalori distinti;
  Risposta $k \neq -2, 0$ ______ **(pt.1A)**
- i valori di k per i quali A_k è diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq 0$ ______ **(pt.2A)**
- fissato $k = -4$, una matrice D diagonale, simile ad A_{-4}, e una relativa matrice P diagonalizzante.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo, sia U il sottospazio $U = \{(0,\ a+b,\ 2a+2b)\ :\ a, b \in \mathbb{R}\}$. Si determinino:

- la dimensione di U;
  Risposta $\dim U = 1$ ______ **(pt.1A)**
- una base di un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^3$;
  Risposta $\mathcal{B}_W = ((1,0,0),(0,1,0))$ ______ **(pt.2A)**
- i valori del parametro reale k per i quali il vettore $v_k = (0, k+2, k+2)$ appartiene a U;
  Risposta $k = -2$ ______ **(pt.1A)**
- posto $k = 0$, una base del sottospazio $v_0^\perp$.
  Risposta $\mathcal{B}_{v_0^\perp} = ((1,0,0),(0,1,-1))$ ______ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 3. In $E_2(\mathbb{R})$, dati i punti $A = (4;0)$ e $B = (0;-8)$ si determinino:

- un'equazione cartesiana dell'asse del segmento AB;
  Risposta $x + 2y + 6 = 0$ ______ **(pt.2G)**
- un'equazione cartesiana della circonferenza passante per A e B e tangente in B alla retta $t\ :\ 4x + 3y + 24 = 0$.
  Risposta $(x-4)^2 + (y+5)^2 = 25$ ______ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}\ :\ x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 2yz + 5 = 0$.

- Si riconosca $\mathcal{Q}$, precisando la natura dei suoi punti semplici.
  Risposta Iperboloide ellittico ______ **(pt.3G)**
- Si riconosca la sezione di $\mathcal{Q}$ con il piano $z = 0$.
  Risposta Iperbole ______ **(pt.2G)**