UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 3^o appello - 12/04/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	Prova di teoria orale ☐

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k+1 & k \\ 0 & 0 \\ k+2 & 2 \\ k+3 & 3 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile solo per $k = \pm 1$, in entrambi i casi con soluzione unica **(pt.2A)**
- Posto $k = -1$, si determini l'insieme delle soluzioni del sistema.

  Risposta $S = \{(-1, 1)\}$ **(pt.2A)**
- Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la coppia $(1, 0)$ è soluzione del sistema.

  Risposta $\nexists k$ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, sia U l'insieme $U = \{(x+y,\ y+z,\ x+y,\ y+z)\ :\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Si determini:

- una base $\mathcal{B}$ per $\mathcal{L}(U)$;

  Risposta $\mathcal{B} = (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)$ **(pt.2A)**
- una base per il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(U)$;

  Risposta $((1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1))$ **(pt.1A)**
- se il vettore $v = (-3, 2, -3, 2)$ appartiene a $\mathcal{L}(U)$, le componenti di v rispetto alla base $\mathcal{B}$, precedentemente indicata. Viceversa, si motivi la non appartenenza di v a $\mathcal{L}(U)$.

  Risposta $\vec{v} \in \mathcal{L}(U)$; componenti: (-3,2) **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$, dati i punti $A(0, 0, 0)$ e $B(2, 0, -4)$ si determini un'equazione cartesiana:

- della retta passante per il punto medio del segmento di estremi A e B, con spazio di traslazione: $V = \{(x, 2x, -x) \in \mathbb{R}^3\ :\ x \in \mathbb{R}\}$;

  Risposta $2x - y - 2 = 0 = x + z + 1$ **(pt.1G)**
- del piano assiale del segmento AB;

  Risposta $x - 2z - 5 = 0$ **(pt.1G)**
- della circonferenza tangente alla retta $s\ :\ x - z = 0 = y$ in A e passante per B.

  Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{10}{3}x + \frac{10}{3}z = 0 = y$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{\mathbb{E}}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k\ :\ 4x^2 + y^2 + (2k+4)xy + 4x - 2y = 0$, al variare di $k \in \mathbb{R}$. Si determini per quali valori del parametro:

- $\mathcal{C}_k$ ha punti impropri immaginari e coniugati;

  Risposta $-4 < k < 0$ **(pt.2G)**
- i punti $P = (1, 1)$ e $Q = (-1, 6)$ sono coniugati rispetto alla polarità indotta da $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $k = -1$ **(pt.2G)**
- il centro di $\mathcal{C}_k$ ha coordinate $C = (1, -2)$.

  Risposta $k = 1$ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 3^o appello - 12/04/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	PROVA DI TEORIA ORALE ☐

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \\ k & 2 \\ k & 3 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ k+1 \\ k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema sia compatibile.
  Risposta Compatibile solo per $k = -1, 3$, in entrambi i casi con soluzione unica ______ **(pt.2A)**
- Posto $k = -1$, si determini l'insieme delle soluzioni del sistema.
  Risposta $S = \{(-2, -1)\}$ ______ **(pt.2A)**
- Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la coppia $(2, -1)$ è soluzione del sistema.
  Risposta $k = 3$ ______ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, sia U l'insieme $U = \{(2x + y,\ y + z,\ x + y,\ y + 2z) \ :\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Si determini:

- una base $\mathcal{B}$ per $\mathcal{L}(U)$;
  Risposta $\mathcal{B} = (2, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 2)$ ______ **(pt.2A)**
- una base per il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(U)$;
  Risposta $((-1, -2, 2, 1))$ ______ **(pt.1A)**
- se il vettore $v = (0, 0, 0, 3)$ appartiene a $\mathcal{L}(U)$, le componenti di v rispetto alla base $\mathcal{B}$, precedentemente indicata. Viceversa, si motivi la non appartenenza di v a $\mathcal{L}(U)$.
  Risposta $v \notin \mathcal{L}(U)$: non è c.l. dei vettori della base; oppure... ______ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$, dati i punti $A(0, 0, 0)$ e $B(-4, 0, 6)$ si determini un'equazione cartesiana:

- della retta passante per il punto medio del segmento di estremi A e B, con spazio di traslazione: $V = \{(x, 2x, -x) \in \mathbb{R}^3 \ :\ x \in \mathbb{R}\}$;
  Risposta $2x - y + 4 = 0 = x + z - 1$ ______ **(pt.1G)**
- del piano assiale del segmento AB;
  Risposta $2x - 3z + 13 = 0$ ______ **(pt.1G)**
- della circonferenza tangente alla retta $s\ :\ x - z = 0 = y$ in A e passante per B.
  Risposta $x^2 + y^2 + z^2 + \frac{26}{5}x - \frac{26}{5}z = 0 = y$ ______ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{\mathbb{E}}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k\ :\ x^2 + y^2 + (2k + 2)xy + 6x - 2y = 0$, al variare di $k \in \mathbb{R}$. Si determini per quali valori del parametro:

- $\mathcal{C}_k$ ha punti impropri immaginari e coniugati;
  Risposta $-2 < k < 0$ ______ **(pt.2G)**
- i punti $P = (1, 4)$ e $Q = (-1, 2)$ sono coniugati rispetto alla polarità indotta da $\mathcal{C}_k$;
  Risposta $k = -1/2$ ______ **(pt.2G)**
- il centro di $\mathcal{C}_k$ ha coordinate $C = (-3, 1)$.
  Risposta $k = -1$ ______ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 3^o appello - 12/04/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	PROVA DI TEORIA ORALE ☐

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k+2 & k+3 \\ 0 & 0 \\ 2 & k+4 \\ 3 & k+5 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k+2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema sia compatibile.
  Risposta Compatibile solo per $k = -3, -1$, in entrambi i casi con soluzione unica ______ **(pt.2A)**
- Posto $k = -3$, si determini l'insieme delle soluzioni del sistema.
  Risposta $S = \{(1, -1)\}$ ______ **(pt.2A)**
- Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la coppia $(0, 1)$ è soluzione del sistema.
  Risposta $\nexists k$ ______ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, sia U l'insieme $U = \{(2x,\ y+z,\ x+y,\ 2z)\ :\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Si determini:

- una base $\mathcal{B}$ per $\mathcal{L}(U)$;
  Risposta $\mathcal{B} = (2, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 2)$ ______ **(pt.2A)**
- una base per il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(U)$;
  Risposta $((-1, -2, 2, 1))$ ______ **(pt.1A)**
- se il vettore $v = (0, 0, 0, -1)$ appartiene a $\mathcal{L}(U)$, le componenti di v rispetto alla base $\mathcal{B}$, precedentemente indicata. Viceversa, si motivi la non appartenenza di v a $\mathcal{L}(U)$.
  Risposta $v \notin \mathcal{L}(U)$: non è c.l. dei vettori della base; oppure... ______ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$, dati i punti $A(0, 0, 0)$ e $B(2, 0, -2)$ si determini un'equazione cartesiana:

- della retta passante per il punto medio del segmento di estremi A e B, con spazio di traslazione: $V = \{(x, 2x, -x) \in \mathbb{R}^3\ :\ x \in \mathbb{R}\}$;
  Risposta $2x - y - 2 = 0 = x + z$ ______ **(pt.1G)**
- del piano assiale del segmento AB;
  Risposta $x - z - 2 = 0$ ______ **(pt.1G)**
- della circonferenza tangente alla retta $s\ :\ x - z = 0 = y$ in A e passante per B.
  Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z = 0 = y$ ______ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{\mathbb{E}}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k\ :\ x^2 + y^2 + (2k+4)xy + 6x - 2y = 0$, al variare di $k \in \mathbb{R}$. Si determini per quali valori del parametro:

- $\mathcal{C}_k$ ha punti impropri immaginari e coniugati;
  Risposta $-3 < k < -1$ ______ **(pt.2G)**
- i punti $P = (1, 4)$ e $Q = (-1, 2)$ sono coniugati rispetto alla polarità indotta da $\mathcal{C}_k$;
  Risposta $k = -3/2$ ______ **(pt.2G)**
- il centro di $\mathcal{C}_k$ ha coordinate $C = (-3, 1)$.
  Risposta $k = -2$ ______ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 3^o appello - 12/04/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	PROVA DI TEORIA ORALE ☐

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 0 \\ -k & 2 \\ -k & 3 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1-k \\ -k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema sia compatibile.
  Risposta Compatibile solo per $k = -3, 1$, in entrambi i casi con soluzione unica **(pt.2A)**
- Posto $k = -3$, si determini l'insieme delle soluzioni del sistema.
  Risposta $S = \{(2, -1)\}$ **(pt.2A)**
- Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la coppia $(0, 1)$ è soluzione del sistema.
  Risposta $\nexists k$ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, sia U l'insieme $U = \{(2x + 2y,\ y + z,\ x + y,\ 2y + 2z)\ :\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Si determini:

- una base $\mathcal{B}$ per $\mathcal{L}(U)$;
  Risposta $\mathcal{B} = (2, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 2)$ **(pt.2A)**
- una base per il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(U)$;
  Risposta $((1, 0, -2, 0), (0, -2, 0, 1))$ **(pt.1A)**
- se il vettore $v = (2, -1, 1, -2)$ appartiene a $\mathcal{L}(U)$, le componenti di v rispetto alla base $\mathcal{B}$, precedentemente indicata. Viceversa, si motivi la non appartenenza di v a $\mathcal{L}(U)$.
  Risposta $v \in \mathcal{L}(U)$; componenti: (1,-1) **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$, dati i punti $A(0, 0, 0)$ e $B(2, -4, 0)$ si determini un'equazione cartesiana:

- della retta passante per il punto medio del segmento di estremi A e B, con spazio di traslazione: $V = \{(x, -x, 2x) \in \mathbb{R}^3\ :\ x \in \mathbb{R}\}$;
  Risposta $2x - z - 2 = 0 = x + y + 1$ **(pt.1G)**
- del piano assiale del segmento AB;
  Risposta $x - 2y - 5 = 0$ **(pt.1G)**
- della circonferenza tangente alla retta $s\ :\ x - y = 0 = z$ in A e passante per B.
  Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{10}{3}x + \frac{10}{3}y = 0 = z$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{\mathbb{E}}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k\ :\ 4x^2 + y^2 + (2k + 8)xy + 4x - 2y = 0$, al variare di $k \in \mathbb{R}$. Si determini per quali valori del parametro:

- $\mathcal{C}_k$ ha punti impropri immaginari e coniugati;
  Risposta $-6 < k < -2$ **(pt.2G)**
- i punti $P = (1, 1)$ e $Q = (-1, 6)$ sono coniugati rispetto alla polarità indotta da $\mathcal{C}_k$;
  Risposta $k = -3$ **(pt.2G)**
- il centro di $\mathcal{C}_k$ ha coordinate $C = (1, -2)$.
  Risposta $k = -1$ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 3^o appello - 12/04/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	PROVA DI TEORIA ORALE ☐

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k+2 & k+1 \\ 0 & 0 \\ k+3 & 2 \\ k+4 & 3 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k+1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema sia compatibile.
  Risposta Compatibile solo per $k = -2, 0$, in entrambi i casi con soluzione unica ________ **(pt.2A)**
- Posto $k = -2$, si determini l'insieme delle soluzioni del sistema.
  Risposta $S = \{(-1, 1)\}$ ________ **(pt.2A)**
- Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la coppia $(1, -1)$ è soluzione del sistema.
  Risposta $k = 0$ ________ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, sia U l'insieme $U = \{(x + y,\ y + z,\ y + z,\ x + y)\ :\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Si determini:

- una base $\mathcal{B}$ per $\mathcal{L}(U)$;
  Risposta $\mathcal{B} = (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0)$ ________ **(pt.2A)**
- una base per il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(U)$;
  Risposta $((1, 0, 0, -1), (0, 1, -1, 0))$ ________ **(pt.1A)**
- se il vettore $v = (2, -3, -3, 2)$ appartiene a $\mathcal{L}(U)$, le componenti di v rispetto alla base $\mathcal{B}$, precedentemente indicata. Viceversa, si motivi la non appartenenza di v a $\mathcal{L}(U)$.
  Risposta $v \in \mathcal{L}(U)$; componenti: (2,-3) ________ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$, dati i punti $A(0, 0, 0)$ e $B(0, 2, -4)$ si determini un'equazione cartesiana:

- della retta passante per il punto medio del segmento di estremi A e B, con spazio di traslazione: $V = \{(2x, x, -x) \in \mathbb{R}^3\ :\ x \in \mathbb{R}\}$;
  Risposta $x - 2y + 2 = 0 = y + z + 1$ ________ **(pt.1G)**
- del piano assiale del segmento AB;
  Risposta $y - 2z - 5 = 0$ ________ **(pt.1G)**
- della circonferenza tangente alla retta $s\ :\ x = 0 = y - z$ in A e passante per B.
  Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{10}{3}y + \frac{10}{3}z = 0 = x$ ________ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{\mathbb{E}}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k\ :\ x^2 + y^2 + (2 - 2k)xy + 6x - 2y = 0$, al variare di $k \in \mathbb{R}$. Si determini per quali valori del parametro:

- $\mathcal{C}_k$ ha punti impropri immaginari e coniugati;
  Risposta $0 < k < 2$ ________ **(pt.2G)**
- i punti $P = (1, 4)$ e $Q = (-1, 2)$ sono coniugati rispetto alla polarità indotta da $\mathcal{C}_k$;
  Risposta $k = 1/2$ ________ **(pt.2G)**
- il centro di $\mathcal{C}_k$ ha coordinate $C = (-3, 1)$.
  Risposta $k = 1$ ________ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 3^o appello - 12/04/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	PROVA DI TEORIA ORALE ☐

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k-1 & k \\ 0 & 0 \\ 2 & k+1 \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k-1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema sia compatibile.
  Risposta Compatibile solo per $k = 0, 2$, in entrambi i casi con soluzione unica ______ **(pt.2A)**
- Posto $k = 0$, si determini l'insieme delle soluzioni del sistema.
  Risposta $S = \{(1, -1)\}$ ______ **(pt.2A)**
- Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la coppia $(-1, 1)$ è soluzione del sistema.
  Risposta $k = 2$ ______ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, sia U l'insieme $U = \{(x + y,\ y + z,\ y + z,\ x + y)\ :\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Si determini:

- una base $\mathcal{B}$ per $\mathcal{L}(U)$;
  Risposta $\mathcal{B} = (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0)$ ______ **(pt.2A)**
- una base per il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(U)$;
  Risposta $((1, 0, 0, -1), (0, 1, -1, 0))$ ______ **(pt.1A)**
- se il vettore $v = (0, 0, 2, 0)$ appartiene a $\mathcal{L}(U)$, le componenti di v rispetto alla base $\mathcal{B}$, precedentemente indicata. Viceversa, si motivi la non appartenenza di v a $\mathcal{L}(U)$.
  Risposta $v \notin \mathcal{L}(U)$: non è c.l. dei vettori della base; oppure... ______ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$, dati i punti $A(0, 0, 0)$ e $B(0, -4, 6)$ si determini un'equazione cartesiana:

- della retta passante per il punto medio del segmento di estremi A e B, con spazio di traslazione: $V = \{(2x, x, -x) \in \mathbb{R}^3\ :\ x \in \mathbb{R}\}$;
  Risposta $x - 2y - 4 = 0 = y + z - 1$ ______ **(pt.1G)**
- del piano assiale del segmento AB;
  Risposta $2y - 3z + 13 = 0$ ______ **(pt.1G)**
- della circonferenza tangente alla retta $s\ :\ x = 0 = y - z$ in A e passante per B.
  Risposta $x^2 + y^2 + z^2 + \frac{26}{5}y - \frac{26}{5}z = 0 = x$ ______ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{\mathbb{E}}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k\ :\ 4x^2 + y^2 + (2k + 12)xy + 4x - 2y = 0$, al variare di $k \in \mathbb{R}$. Si determini per quali valori del parametro:

- $\mathcal{C}_k$ ha punti impropri immaginari e coniugati;
  Risposta $-8 < k < -4$ ______ **(pt.2G)**
- i punti $P = (1, 1)$ e $Q = (-1, 6)$ sono coniugati rispetto alla polarità indotta da $\mathcal{C}_k$;
  Risposta $k = -5$ ______ **(pt.2G)**
- il centro di $\mathcal{C}_k$ ha coordinate $C = (1, -2)$.
  Risposta $k = -3$ ______ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 3^o appello - 12/04/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	PROVA DI TEORIA ORALE ☐

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k+1 & k \\ 0 & 0 \\ k+2 & 2 \\ k+3 & 3 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema sia compatibile.
  Risposta Compatibile solo per $k = \pm 1$, in entrambi i casi con soluzione unica ______ **(pt.2A)**
- Posto $k = 1$, si determini l'insieme delle soluzioni del sistema.
  Risposta $S = \{(1, -1)\}$ ______ **(pt.2A)**
- Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la coppia $(-1, 1)$ è soluzione del sistema.
  Risposta $k = -1$ ______ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, sia U l'insieme $U = \{(2x + y,\ x + y,\ y + z,\ y + 2z)\ :\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Si determini:

- una base $\mathcal{B}$ per $\mathcal{L}(U)$;
  Risposta $\mathcal{B} = (2, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1)(0, 0, 1, 2)$ ______ **(pt.2A)**
- una base per il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(U)$;
  Risposta $((1, -2, 2, -1))$ ______ **(pt.1A)**
- se il vettore $v = (0, 0, 0, 3)$ appartiene a $\mathcal{L}(U)$, le componenti di v rispetto alla base $\mathcal{B}$, precedentemente indicata. Viceversa, si motivi la non appartenenza di v a $\mathcal{L}(U)$.
  Risposta $v \notin \mathcal{L}(U)$: non è c.l. dei vettori della base; oppure... ______ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$, dati i punti $A(0, 0, 0)$ e $B(-4, 6, 0)$ si determini un'equazione cartesiana:

- della retta passante per il punto medio del segmento di estremi A e B, con spazio di traslazione: $V = \{(x, -x, 2x) \in \mathbb{R}^3\ :\ x \in \mathbb{R}\}$;
  Risposta $2x - z + 4 = 0 = x + y - 1$ ______ **(pt.1G)**
- del piano assiale del segmento AB;
  Risposta $2x - 3y + 13 = 0$ ______ **(pt.1G)**
- della circonferenza tangente alla retta $s\ :\ x - y = 0 = z$ in A e passante per B.
  Risposta $x^2 + y^2 + z^2 + \frac{26}{5}x - \frac{26}{5}y = 0 = z$ ______ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{\mathbb{E}}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k\ :\ x^2 + y^2 + 2kxy + 6x - 2y = 0$, al variare di $k \in \mathbb{R}$. Si determini per quali valori del parametro:

- $\mathcal{C}_k$ ha punti impropri immaginari e coniugati;
  Risposta $-1 < k < 1$ ______ **(pt.2G)**
- i punti $P = (1, 4)$ e $Q = (-1, 2)$ sono coniugati rispetto alla polarità indotta da $\mathcal{C}_k$;
  Risposta $k = 1/2$ ______ **(pt.2G)**
- il centro di $\mathcal{C}_k$ ha coordinate $C = (-3, 1)$.
  Risposta $k = 0$ ______ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 3^o appello - 12/04/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	PROVA DI TEORIA ORALE ☐

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 0 \\ k+1 & 2 \\ k+1 & 3 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ k+2 \\ k+1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema sia compatibile.
  Risposta Compatibile solo per $k = \pm 2$, in entrambi i casi con soluzione unica ________ **(pt.2A)**
- Posto $k = -2$, si determini l'insieme delle soluzioni del sistema.
  Risposta $S = \{(-2, -1)\}$ ________ **(pt.2A)**
- Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la coppia $(2, -1)$ è soluzione del sistema.
  Risposta $k = 2$ ________ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, sia U l'insieme $U = \{(2x + 2y,\ x + y,\ y + z,\ 2y + 2z) \ :\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Si determini:

- una base $\mathcal{B}$ per $\mathcal{L}(U)$;
  Risposta $\mathcal{B} = (2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 2)$ ________ **(pt.2A)**
- una base per il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(U)$;
  Risposta $((1, -2, 0, 0), (0, 0, -2, 1))$ ________ **(pt.1A)**
- se il vettore $v = (-2, -1, 1, 2)$ appartiene a $\mathcal{L}(U)$, le componenti di v rispetto alla base $\mathcal{B}$, precedentemente indicata. Viceversa, si motivi la non appartenenza di v a $\mathcal{L}(U)$.
  Risposta $v \in \mathcal{L}(U)$; componenti: (-1,1) ________ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$, dati i punti $A(0, 0, 0)$ e $B(2, -2, 0)$ si determini un'equazione cartesiana:

- della retta passante per il punto medio del segmento di estremi A e B, con spazio di traslazione: $V = \{(x, -x, 2x) \in \mathbb{R}^3 \ :\ x \in \mathbb{R}\}$;
  Risposta $2x - z - 2 = 0 = x + y$ ________ **(pt.1G)**
- del piano assiale del segmento AB;
  Risposta $x - y - 2 = 0$ ________ **(pt.1G)**
- della circonferenza tangente alla retta $s \ :\ x - y = 0 = z$ in A e passante per B.
  Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y = 0 = z$ ________ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{\mathbb{E}}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k \ :\ 4x^2 + y^2 + (4 - 2k)xy + 4x - 2y = 0$, al variare di $k \in \mathbb{R}$. Si determini per quali valori del parametro:

- $\mathcal{C}_k$ ha punti impropri immaginari e coniugati;
  Risposta $0 < k < 4$ ________ **(pt.2G)**
- i punti $P = (1, 1)$ e $Q = (-1, 6)$ sono coniugati rispetto alla polarità indotta da $\mathcal{C}_k$;
  Risposta $k = 1$ ________ **(pt.2G)**
- il centro di $\mathcal{C}_k$ ha coordinate $C = (1, -2)$.
  Risposta $k = -1$ ________ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 3^o appello - 12/04/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	PROVA DI TEORIA ORALE ☐

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k-1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & k-1 \\ 3 & k-1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ k \\ k-1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema sia compatibile.
  Risposta Compatibile solo per $k = 0, 4$, in entrambi i casi con soluzione unica **(pt.2A)**
- Posto $k = 0$, si determini l'insieme delle soluzioni del sistema.
  Risposta $S = \{(-1, -2)\}$ **(pt.2A)**
- Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la coppia $(1, 0)$ è soluzione del sistema.
  Risposta $\nexists k$ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, sia U l'insieme $U = \{(2x,\ x+y,\ y+z,\ 2z)\ :\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Si determini:

- una base $\mathcal{B}$ per $\mathcal{L}(U)$;
  Risposta $\mathcal{B} = (2, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 2)$ **(pt.2A)**
- una base per il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(U)$;
  Risposta $((-1, 2, -2, 1))$ **(pt.1A)**
- se il vettore $v = (0, 5, 5, 0)$ appartiene a $\mathcal{L}(U)$, le componenti di v rispetto alla base $\mathcal{B}$, precedentemente indicata. Viceversa, si motivi la non appartenenza di v a $\mathcal{L}(U)$.
  Risposta $v \in \mathcal{L}(U)$; componenti: (0,5,0) **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$, dati i punti $A(0, 0, 0)$ e $B(0, 2, -2)$ si determini un'equazione cartesiana:

- della retta passante per il punto medio del segmento di estremi A e B, con spazio di traslazione: $V = \{(2x, x, -x) \in \mathbb{R}^3\ :\ x \in \mathbb{R}\}$;
  Risposta $x - 2y + 2 = 0 = y + z$ **(pt.1G)**
- del piano assiale del segmento AB;
  Risposta $y - z - 2 = 0$ **(pt.1G)**
- della circonferenza tangente alla retta $s\ :\ x = 0 = y - z$ in A e passante per B.
  Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z = 0 = x$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{\mathbb{E}}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k\ :\ 4x^2 + y^2 + 2kxy + 4x - 2y = 0$, al variare di $k \in \mathbb{R}$. Si determini per quali valori del parametro:

- $\mathcal{C}_k$ ha punti impropri immaginari e coniugati;
  Risposta $-2 < k < 2$ **(pt.2G)**
- i punti $P = (1, 1)$ e $Q = (-1, 6)$ sono coniugati rispetto alla polarità indotta da $\mathcal{C}_k$;
  Risposta $k = 1$ **(pt.2G)**
- il centro di $\mathcal{C}_k$ ha coordinate $C = (1, -2)$.
  Risposta $k = 3$ **(pt.2G)**