UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 05/02/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 2 & k & k+2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & k & 0 & k \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k-2 \\ -1 \\ k+1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

Risposta Il sistema è compatibile per ogni k. Per $k = 0$ il sistema ammette ∞^2 soluzioni. Per $k \neq 0$ il sistema ammette ∞^1 soluzioni **(pt.3)**

Posto $k = 1$ si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni di $A_1 X = B_1$;

  Risposta $S = \{(3, -1-t, 1-t, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

- $\mathcal{L}(S)$ e un suo complemento ortogonale rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$.

  Risposta $\mathcal{L}(S) = \{(3x, -x-t, x-t, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x, t \in \mathbb{R}\}$ $\quad \mathcal{L}(S)^\perp = \{(a, 3a+b, b, 3a+2b) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^5(\mathbb{R})$ si dica se è possibile completare la sequenza $A = ((1,0,1,0,2), (-2,0,0,3,1), (4,0,2,-3,3))$ in modo da ottenere una base di $\mathbb{R}^5(\mathbb{R})$. In caso affermativo, si indichi il numero di vettori che è necessario aggiungere.

Risposta Non è possibile ottenere una base di $\mathbb{R}^5(\mathbb{R})$ contenente la sequenza A, poiché A è legata. **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & k+7 & 0 \\ -k & -5 & 2 \\ 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ dove k è un parametro reale. Si determinino, se esistono, i valori di k per i quali $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore di A.

Risposta $k = 2$ **(pt.2)**

Posto $k = 3$ si determini una matrice reale simile ad A.

Risposta $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 \\ -3 & -5 & 2 \\ 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $E_3(\mathbb{R})$ si determini una rappresentazione cartesiana della circonferenza tangente in $A = (1,0,2)$ alla retta $r : x - 1 = 0 = y$ e passante per $B = (-1,4,0)$.

Risposta $\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ (x+5)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 36 \end{cases}$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C} : kx^2 + 4y^2 - 2ky + 4 = 0$, dove k è un parametro reale. Si determinino, se esistono, i valori di k per i quali:

- $\mathcal{C}$ è una conica generale;

  Risposta $k \neq 0, \pm 4$ **(pt.2)**

- $\mathcal{C}$ è una iperbole equilatera;

  Risposta $\nexists k$ **(pt.1)**

- la polare del punto $P = (3,1)$ è la retta $r : x - y - 1 = 0$

  Risposta $k = -2$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana del cono $\mathcal{Q}$ di vertice $V = (0,1,0)$ e curva direttrice $\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 + 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Risposta $\mathcal{Q} : x^2 + 3y^2 - z^2 - 6y + 3 = 0$ **(pt.4)**

Si determinino, motivando la scelta, un piano α che sezioni $\mathcal{Q}$ secondo una conica riducibile e un piano β che sezioni $\mathcal{Q}$ secondo una conica irriducibile.

Risposta $\alpha : x = 0 \ (V \in \alpha)$, $\quad \beta : x = 1 \ (V \notin \beta)$ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 05/02/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 2 & k-1 & 0 & k-1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & k-1 & k \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k-3 \\ -2 \\ k-2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

Risposta Il sistema è compatibile per ogni k. Per $k = 1$ il sistema ammette ∞^2 soluzioni. Per $k \neq 1$ il sistema ammette ∞^1 soluzioni **(pt.3)**

Posto $k = 0$ si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni di $A_0 X = B_0$;

  Risposta $S = \{(-2, y, y+2, -1-y) \in \mathbb{R}^4 \mid y \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

- $\mathcal{L}(S)$ e un suo complemento ortogonale rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$.

  Risposta $\mathcal{L}(S) = \{(-2x, y, y+2x, -x-y) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ $\mathcal{L}(S)^\perp = \{(a, c-2a, c, -2a+2c) \in \mathbb{R}^4 \mid a, c \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^5(\mathbb{R})$ si dica se è possibile completare la sequenza $A = ((-2,0,0,-2,1), (-3,3,0,0,-1), (-1,-3,0,-4,3))$ in modo da ottenere una base di $\mathbb{R}^5(\mathbb{R})$. In caso affermativo, si indichi il numero di vettori che è necessario aggiungere.

Risposta Non è possibile ottenere una base di $\mathbb{R}^5(\mathbb{R})$ contenente la sequenza A, poiché A è legata. **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 \\ k+6 & 4 & -2 \\ 0 & -9 & 1 \end{pmatrix}$ dove k è un parametro reale. Si determinino, se esistono, i valori di k per i quali $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore di A.

Risposta $k = -5$ **(pt.2)**

Posto $k = 4$ si determini una matrice reale simile ad A.

Risposta $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 10 & 4 & -2 \\ 0 & -9 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $E_3(\mathbb{R})$ si determini una rappresentazione cartesiana della circonferenza tangente in $A = (0,1,2)$ alla retta $r : x = 0 = y - 1$ e passante per $B = (4,-1,0)$.

Risposta $\begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \\ x^2 + (y+5)^2 + (z-2)^2 = 36 \end{cases}$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C} : 4x^2 + ky^2 - 2kx + 4 = 0$, dove k è un parametro reale. Si determinino, se esistono, i valori di k per i quali:

- $\mathcal{C}$ è una conica generale;

  Risposta $k \neq 0, \pm 4$ **(pt.2)**

- $\mathcal{C}$ è una iperbole equilatera;

  Risposta $\nexists k$ **(pt.1)**

- la polare del punto $P = (1,2)$ è la retta $r : 3x - 2y + 3 = 0$

  Risposta $k = -2$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana del cono $\mathcal{Q}$ di vertice $V = (0,1,0)$ e curva direttrice $\mathcal{C} : \begin{cases} -x^2 + 3y^2 + z^2 - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Risposta $\mathcal{Q} : x^2 + 2y^2 - z^2 - 4y + 2 = 0$ **(pt.4)**

Si determinino, motivando la scelta, un piano α che sezioni $\mathcal{Q}$ secondo una conica riducibile e un piano β che sezioni $\mathcal{Q}$ secondo una conica irriducibile.

Risposta $\alpha : z = 0$ $(V \in \alpha)$, $\beta : z = 1$ $(V \notin \beta)$ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 05/02/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 0 & k-1 & 1 & k-1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ k+2 & -1 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k \\ -k \\ -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

Risposta Il sistema è compatibile per ogni k. Per $k = -2$ il sistema ammette ∞^2 soluzioni. Per $k \neq -2$ il sistema ammette ∞^1 soluzioni **(pt.3)**

Posto $k = 2$ si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni di $A_2X = B_2$;

  Risposta $S = \{(-t-1/2, -1-t, 3, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

- $\mathcal{L}(S)$ e un suo complemento ortogonale rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$.

  Risposta $\mathcal{L}(S) = \{(-x/2-t, -x-t, 3x, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x, t \in \mathbb{R}\}$ $\mathcal{L}(S)^\perp = \{(-2b+6c, b, c, 6c-b) \in \mathbb{R}^4 \mid b, c \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^5(\mathbb{R})$ si dica se è possibile completare la sequenza $A = ((2,0,-1,0,1), (1,2,0,0,-3), (3,-2,-2,0,5))$ in modo da ottenere una base di $\mathbb{R}^5(\mathbb{R})$. In caso affermativo, si indichi il numero di vettori che è necessario aggiungere.

Risposta Non è possibile ottenere una base di $\mathbb{R}^5(\mathbb{R})$ contenente la sequenza A, poiché A è legata. **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & k+5 & 0 \\ 2-k & -5 & 2 \\ 0 & -8 & 1 \end{pmatrix}$ dove k è un parametro reale. Si determinino, se esistono, i valori di k per i quali $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore di A.

Risposta $k = 4$ **(pt.2)**

Posto $k = 1$ si determini una matrice reale simile ad A.

Risposta $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & -8 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $E_3(\mathbb{R})$ si determini una rappresentazione cartesiana della circonferenza tangente in $A = (0,3,1)$ alla retta $r : x = 0 = z - 1$ e passante per $B = (2,0,-2)$.

Risposta $\begin{cases} 3x + 2z - 2 = 0 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 17 \end{cases}$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C} : kx^2 + 3y^2 - 2ky + 3 = 0$, dove k è un parametro reale. Si determinino, se esistono, i valori di k per i quali:

- $\mathcal{C}$ è una conica generale;

  Risposta $k \neq 0, \pm 3$ **(pt.2)**

- $\mathcal{C}$ è una iperbole equilatera;

  Risposta $\nexists k$ **(pt.1)**

- la polare del punto $P = (2,2)$ è la retta $r : 8x + 2y - 5 = 0$

  Risposta $k = 4$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana del cono $\mathcal{Q}$ di vertice $V = (0,0,1)$ e curva direttrice $\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 - y^2 + 3z^2 + 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

Risposta $\mathcal{Q} : x^2 - y^2 + 2z^2 - 4z + 2 = 0$ **(pt.4)**

Si determinino, motivando la scelta, un piano α che sezioni $\mathcal{Q}$ secondo una conica riducibile e un piano β che sezioni $\mathcal{Q}$ secondo una conica irriducibile.

Risposta $\alpha : y = 0$ $(V \in \alpha)$, $\beta : y = 1$ $(V \notin \beta)$ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 05/02/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k-2 & 3 & 0 & k+1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & k-2 & k+2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k-2 \\ 1-k \\ k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

Risposta Il sistema è compatibile per ogni k. Per $k = 2$ il sistema ammette ∞^2 soluzioni. Per $k \neq 2$ il sistema ammette ∞^1 soluzioni **(pt.3)**

Posto $k = 3$ si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni di $A_3X = B_3$;

  Risposta $S = \{(7-4t, -2, 9-5t, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

- $\mathcal{L}(S)$ e un suo complemento ortogonale rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$.

  Risposta $\mathcal{L}(S) = \{(7x-4t, -2x, 9x-5t, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x, t \in \mathbb{R}\}$ $\mathcal{L}(S)^\perp = \{(2a, 7a+9b, 2b, 8a+10b) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^5(\mathbb{R})$ si dica se è possibile completare la sequenza $A = ((1,2,0,0,3), (-1,0,0,-2,2), (3,4,0,2,4))$ in modo da ottenere una base di $\mathbb{R}^5(\mathbb{R})$. In caso affermativo, si indichi il numero di vettori che è necessario aggiungere.

Risposta Non è possibile ottenere una base di $\mathbb{R}^5(\mathbb{R})$ contenente la sequenza A, poiché A è legata. **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -k-1 & 0 \\ k+7 & 4 & -2 \\ 0 & -9 & 1 \end{pmatrix}$ dove k è un parametro reale. Si determinino, se esistono, i valori di k per i quali $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ è un autovettore di A.

Risposta $k = -6$ **(pt.2)**

Posto $k = 2$ si determini una matrice reale simile ad A.

Risposta $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 9 & 4 & -2 \\ 0 & -9 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $E_3(\mathbb{R})$ si determini una rappresentazione cartesiana della circonferenza tangente in $A = (3,1,0)$ alla retta $r : z = 0 = y - 1$ e passante per $B = (0, 2, -2)$.

Risposta $\begin{cases} 2y + z - 2 = 0 \\ (x-3)^2 + y^2 + (z+4)^2 = 17 \end{cases}$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C} : 3x^2 + ky^2 - 2kx + 3 = 0$, dove k è un parametro reale. Si determinino, se esistono, i valori di k per i quali:

- $\mathcal{C}$ è una conica generale;

  Risposta $k \neq 0, \pm 3$ **(pt.2)**

- $\mathcal{C}$ è una iperbole equilatera;

  Risposta $\nexists k$ **(pt.1)**

- la polare del punto $P = (2, 1)$ è la retta $r : 4x + 2y - 1 = 0$

  Risposta $k = 2$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana del cono $\mathcal{Q}$ di vertice $V = (1, 0, 0)$ e curva direttrice $\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 + 2x + 5 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$.

Risposta $\mathcal{Q} : 5x^2 - y^2 + z^2 - 10x + 5 = 0$ **(pt.4)**

Si determinino, motivando la scelta, un piano α che sezioni $\mathcal{Q}$ secondo una conica riducibile e un piano β che sezioni $\mathcal{Q}$ secondo una conica irriducibile.

Risposta $\alpha : y = 0$ $(V \in \alpha)$, $\beta : y = 1$ $(V \notin \beta)$ **(pt.2)**