UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 10/01/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	PROVA DI TEORIA ORALE ☐

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2k & 4 & 2k \\ 1 & 2k & 1 \\ 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $2k-2, k+1, 2k+2$ ______ **(pt.1A)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali gli autovalori sono distinti;
  Risposta $k \neq -1, 3$ ______ **(pt.1A)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq 3$ ______ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si considerino i vettori $\mathbf{v} = (-1, 1, 0, 3)$ e $\mathbf{w} = (2, 0, 1, 1)$. Si determini la proiezione di $\mathbf{v}$ lungo $\mathbf{w}$.
Risposta $(1/3, 0, 1/6, 1/6)$ ______ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 3. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k \\ 6 \\ 2-6k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Sia S_k l'insieme delle soluzioni del sistema $A_k X = B_k$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui è compatibile;
  Risposta $k = -13/2, 0$ compatibile, con soluzione unica; $k \neq -13/2, 0$ non compatibile ______ **(pt.3A)**
- posto $k = 0$, si determini una base di $\mathcal{L}(S_0)$;
  Risposta $((1, -1))$ ______ **(pt.2A)**
- interpretando x e y come coordinate in $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$, si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la mutua posizione delle tre rette r, s, t, rappresentate ordinatamente dalle tre equazioni del sistema.
  Risposta $k = -13/2, 0$ fascio proprio; $k = 1$: r e t parallele e distinte, s incidente r e t; $k = -1/2$: s e t parallele e distinte, r incidente s e t; $k \neq -13/2, -1/2, 0, 1$: rette incidenti solo a due a due. ______ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino, al variare del parametro reale k, la conica $\mathcal{C}_k \ : \ 2kx^2 + 2xy + ky^2 - 2x + 1 = 0$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ ha due punti impropri immaginari e coniugati;
  Risposta $k < -\sqrt{2}/2 \cup k > \sqrt{2}/2$ ______ **(pt.2G)**
- $\mathcal{C}_k$ ha un asintoto parallelo alla retta $x + y - 2 = 0$.
  Risposta $k = 2/3$ ______ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 5. Dato il sistema $2x - kz - k + 1 = kx + (k-4)z - 1 = 0$, dove k è un parametro reale, si determinino, se possibile, i valori di k per i quali:

- il sistema rappresenta una retta di $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$;
  Risposta $k \neq 2$ ______ **(pt.1G)**
- il sistema rappresenta una retta propria di $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$;
  Risposta $k \neq -4, 2$ ______ **(pt.1G)**
- la retta rappresentata dal sistema passa per il punto $P_\infty = [(1, 0, -1, 0)]$.
  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ ______ **(pt.1G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 10/01/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	PROVA DI TEORIA ORALE ☐

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2k-2 & 4 & 2k-2 \\ 1 & 2k-2 & 1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $2k-4, k, 2k$ **(pt.1A)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali gli autovalori sono distinti;
  Risposta $k \neq 0, 4$ **(pt.1A)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq 4$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si considerino i vettori $\mathbf{v} = (1, 1, -1, 0)$ e $\mathbf{w} = (1, 2, -2, -1)$. Si determini la proiezione di $\mathbf{v}$ lungo $\mathbf{w}$.
Risposta $(1/2, 1, -1, -1/2)$ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 3. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -k-1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k+2 \\ 1 \\ 3k+3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Sia S_k l'insieme delle soluzioni del sistema $A_k X = B_k$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui è compatibile;
  Risposta $k = -1, 3/2$ compatibile, con soluzione unica; $k \neq -1, 3/2$ non compatibile **(pt.3A)**
- posto $k = -1$, si determini una base di $\mathcal{L}(S_{-1})$;
  Risposta $((0, 1))$ **(pt.2A)**
- interpretando x e y come coordinate in $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$, si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la mutua posizione delle tre rette r, s, t, rappresentate ordinatamente dalle tre equazioni del sistema.
  Risposta $k = -1, 3/2$ fascio proprio; $k = 2$: r e t parallele e distinte, s incidente r e t; $k = 1/2$: s e t parallele e distinte, r incidente s e t; $k \neq -1, 1/2, 3/2, 2$: rette incidenti solo a due a due. **(pt.3G)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino, al variare del parametro reale k, la conica $\mathcal{C}_k \; : \; (k-1)x^2 - 4xy + 2(k-1)y^2 - 2x + 1 = 0$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ ha due punti impropri immaginari e coniugati;
  Risposta $k < 1 - \sqrt{2} \cup k > 1 + \sqrt{2}$ **(pt.2G)**
- $\mathcal{C}_k$ ha un asintoto parallelo alla retta $x - y + 2 = 0$.
  Risposta $k = 7/3$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 5. Dato il sistema $4x - (k-2)y + k - 3 = (k-2)x + (k-10)y + 3 = 0$, dove k è un parametro reale, si determinino, se possibile, i valori di k per i quali:

- il sistema rappresenta una retta di $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$;
  Risposta $k \neq 6$ **(pt.1G)**
- il sistema rappresenta una retta propria di $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$;
  Risposta $k \neq \pm 6$ **(pt.1G)**
- la retta rappresentata dal sistema passa per il punto $P_\infty = [(1, -1, 0, 0)]$.
  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ **(pt.1G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 10/01/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	PROVA DI TEORIA ORALE ☐

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2k-4 & 4 & 2k-4 \\ 1 & 2k-4 & 1 \\ 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $2k-6, k-1, 2k-2$ ______ **(pt.1A)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali gli autovalori sono distinti;
  Risposta $k \neq 1, 5$ ______ **(pt.1A)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq 5$ ______ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si considerino i vettori $\mathbf{v} = (1, 0, 2, -1)$ e $\mathbf{w} = (1, -1, 3, 1)$. Si determini la proiezione di $\mathbf{v}$ lungo $\mathbf{w}$.
Risposta $(1/2, -1/2, 3/2, 1/2)$ ______ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 3. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1-k \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 3k-3 \\ 1 \\ k-2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Sia S_k l'insieme delle soluzioni del sistema $A_k X = B_k$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui è compatibile;
  Risposta $k = 1, 7/3$ compatibile, con soluzione unica; $k \neq 1, 7/3$ non compatibile ______ **(pt.3A)**
- posto $k = 1$, si determini una base di $\mathcal{L}(S_1)$;
  Risposta $((1, 2))$ ______ **(pt.2A)**
- interpretando x e y come coordinate in $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$, si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la mutua posizione delle tre rette r, s, t, rappresentate ordinatamente dalle tre equazioni del sistema.
  Risposta $k = 1, 7/3$ fascio proprio; $k = 3/2$: r e t parallele e distinte, s incidente r e t; $k = 2$: s e t parallele e distinte, r incidente s e t; $k \neq 1, 3/2, 2, 7/3$: rette incidenti solo a due a due. ______ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino, al variare del parametro reale k, la conica $\mathcal{C}_k$: $3(k+1)x^2 + 4xy + (k+1)y^2 + 4x + 1 = 0$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ ha due punti impropri immaginari e coniugati;
  Risposta $k < (-3-2\sqrt{3})/3 \cup k > (-3+2\sqrt{3})/3$ ______ **(pt.2G)**
- $\mathcal{C}_k$ ha un asintoto parallelo alla retta $x - y + 2 = 0$.
  Risposta $k = -2$ ______ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 5. Dato il sistema $3y - (k-1)z - k + 3 = (k-1)y + (k-7)z - 1 = 0$, dove k è un parametro reale, si determinino, se possibile, i valori di k per i quali:

- il sistema rappresenta una retta di $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$;
  Risposta $k \neq 4$ ______ **(pt.1G)**
- il sistema rappresenta una retta propria di $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$;
  Risposta $k \neq -5, 4$ ______ **(pt.1G)**
- la retta rappresentata dal sistema passa per il punto $P_\infty = [(0, 1, -1, 0)]$.
  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ ______ **(pt.1G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 10/01/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	PROVA DI TEORIA ORALE ☐

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2k-6 & 4 & 2k-6 \\ 1 & 2k-6 & 1 \\ 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $2k-8, k-2, 2k-4$ **(pt.1A)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali gli autovalori sono distinti;
  Risposta $k \neq 2, 6$ **(pt.1A)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq 6$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si considerino i vettori $\mathbf{v} = (2, 1, -1, 0)$ e $\mathbf{w} = (3, 1, 1, -1)$. Si determini la proiezione di $\mathbf{v}$ lungo $\mathbf{w}$.
Risposta $(3/2, 1/2, 1/2, -1/2)$ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 3. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -k-1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 3k+3 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Sia S_k l'insieme delle soluzioni del sistema $A_k X = B_k$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui è compatibile;
  Risposta $k = -1, 1/3$ compatibile, con soluzione unica; $k \neq -1, 1/3$ non compatibile **(pt.3A)**
- posto $k = -1$, si determini una base di $\mathcal{L}(S_{-1})$;
  Risposta $((1, 2))$ **(pt.2A)**
- interpretando x e y come coordinate in $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$, si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la mutua posizione delle tre rette r, s, t, rappresentate ordinatamente dalle tre equazioni del sistema.
  Risposta $k = -1, 1/3$ fascio proprio; $k = -1/2$: r e t parallele e distinte, s incidente r e t; $k = 0$: s e t parallele e distinte, r incidente s e t; $k \neq -1, -1/2, 0, 1/3$: rette incidenti solo a due a due. **(pt.3G)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino, al variare del parametro reale k, la conica $\mathcal{C}_k$: $3(k-1)x^2 + 4xy + (k-1)y^2 + 4x + 1 = 0$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ ha due punti impropri immaginari e coniugati;
  Risposta $k < (3 - 2\sqrt{3})/3 \cup k > (3 + 2\sqrt{3})/3$ **(pt.2G)**
- $\mathcal{C}_k$ ha un asintoto parallelo alla retta $x - y + 2 = 0$.
  Risposta $k = 0$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 5. Dato il sistema $3x - (k+1)y - k + 1 = (k+1)x + (k-5)y - 1 = 0$, dove k è un parametro reale, si determinino, se possibile, i valori di k per i quali:

- il sistema rappresenta una retta di $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$;
  Risposta $k \neq 2$ **(pt.1G)**
- il sistema rappresenta una retta propria di $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$;
  Risposta $k \neq -7, 2$ **(pt.1G)**
- la retta rappresentata dal sistema passa per il punto $P_\infty = [(1, -1, 0, 0)]$.
  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ **(pt.1G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 10/01/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	PROVA DI TEORIA ORALE ☐

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2k+4 & 4 & 2k+4 \\ 1 & 2k+4 & 1 \\ 0 & 0 & k+3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $2k+2, k+3, 2k+6$ ______ **(pt.1A)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali gli autovalori sono distinti;
  Risposta $k \neq -3, 1$ ______ **(pt.1A)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq 1$ ______ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si considerino i vettori $\mathbf{v} = (3, -1, 1, 0)$ e $\mathbf{w} = (1, 2, 0, 1)$. Si determini la proiezione di $\mathbf{v}$ lungo $\mathbf{w}$.
Risposta $(1/6, 1/3, 0, 1/6)$ ______ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 3. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & k-1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k-1 \\ 6 \\ 8-6k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Sia S_k l'insieme delle soluzioni del sistema $A_k X = B_k$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui è compatibile;
  Risposta $k = -11/2, 1$ compatibile, con soluzione unica; $k \neq -11/2, 1$ non compatibile ______ **(pt.3A)**
- posto $k = 1$, si determini una base di $\mathcal{L}(S_1)$;
  Risposta $((1, -1))$ ______ **(pt.2A)**
- interpretando x e y come coordinate in $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$, si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la mutua posizione delle tre rette r, s, t, rappresentate ordinatamente dalle tre equazioni del sistema.
  Risposta $k = -11/2, 1$ fascio proprio; $k = 2$: r e t parallele e distinte, s incidente r e t; $k = 1/2$: s e t parallele e distinte, r incidente s e t; $k \neq -11/2, 1/2, 1, 2$: rette incidenti solo a due a due. ______ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino, al variare del parametro reale k, la conica $\mathcal{C}_k$: $2(k+1)x^2 + 2xy + (k+1)y^2 - 2x + 1 = 0$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ ha due punti impropri immaginari e coniugati;
  Risposta $k < (-2-\sqrt{2})/2 \cup k > (-2+\sqrt{2})/2$ ______ **(pt.2G)**
- $\mathcal{C}_k$ ha un asintoto parallelo alla retta $x + y - 2 = 0$.
  Risposta $k = -1/3$ ______ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 5. Dato il sistema $2x - (k-1)y - k + 2 = (k-1)x + (k-5)y - 1 = 0$, dove k è un parametro reale, si determinino, se possibile, i valori di k per i quali:

- il sistema rappresenta una retta di $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$;
  Risposta $k \neq 3$ ______ **(pt.1G)**
- il sistema rappresenta una retta propria di $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$;
  Risposta $k \neq \pm 3$ ______ **(pt.1G)**
- la retta rappresentata dal sistema passa per il punto $P_\infty = [(1, -1, 0, 0)]$.
  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ ______ **(pt.1G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 10/01/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	PROVA DI TEORIA ORALE ☐

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2k+8 & 4 & 2k+8 \\ 1 & 2k+8 & 1 \\ 0 & 0 & k+5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $2k+6, k+5, 2k+10$ **(pt.1A)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali gli autovalori sono distinti;
  Risposta $k \neq -5, -1$ **(pt.1A)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq -1$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si considerino i vettori $\mathbf{v} = (1, -1, 0, 1)$ e $\mathbf{w} = (1, -2, -1, 2)$. Si determini la proiezione di $\mathbf{v}$ lungo $\mathbf{w}$.
Risposta $(1/2, -1, -1/2, 1)$ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 3. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -k \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k+1 \\ 1 \\ 3k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Sia S_k l'insieme delle soluzioni del sistema $A_k X = B_k$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui è compatibile;
  Risposta $k = 0, 5/2$ compatibile, con soluzione unica; $k \neq 0, 5/2$ non compatibile **(pt.3A)**
- posto $k = 0$, si determini una base di $\mathcal{L}(S_0)$;
  Risposta $((0, 1))$ **(pt.2A)**
- interpretando x e y come coordinate in $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$, si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la mutua posizione delle tre rette r, s, t, rappresentate ordinatamente dalle tre equazioni del sistema.
  Risposta $k = 0, 5/2$ fascio proprio; $k = 3$: r e t parallele e distinte, s incidente r e t; $k = 3/2$: s e t parallele e distinte, r incidente s e t; $k \neq 0, 3/2, 5/2, 3$: rette incidenti solo a due a due. **(pt.3G)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino, al variare del parametro reale k, la conica $\mathcal{C}_k \ : \ kx^2 - 4xy + 2ky^2 - 2x + 1 = 0$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ ha due punti impropri immaginari e coniugati;
  Risposta $k < -\sqrt{2} \cup k > \sqrt{2}$ **(pt.2G)**
- $\mathcal{C}_k$ ha un asintoto parallelo alla retta $x - y + 2 = 0$.
  Risposta $k = 4/3$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 5. Dato il sistema $4y - kz + k - 1 = ky + (k-8)z + 3 = 0$, dove k è un parametro reale, si determinino, se possibile, i valori di k per i quali:

- il sistema rappresenta una retta di $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$;
  Risposta $k \neq 4$ **(pt.1G)**
- il sistema rappresenta una retta propria di $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$;
  Risposta $k \neq -8, 4$ **(pt.1G)**
- la retta rappresentata dal sistema passa per il punto $P_\infty = [(0, 1, -1, 0)]$.
  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ **(pt.1G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 10/01/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	PROVA DI TEORIA ORALE ☐

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2k+6 & 4 & 2k+6 \\ 1 & 2k+6 & 1 \\ 0 & 0 & k+4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $2k+4, k+4, 2k+8$ ______ **(pt.1A)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali gli autovalori sono distinti;
  Risposta $k \neq -4, 0$ ______ **(pt.1A)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq 0$ ______ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si considerino i vettori $\mathbf{v} = (-1, 0, 1, 1)$ e $\mathbf{w} = (-2, -1, 1, 2)$. Si determini la proiezione di $\mathbf{v}$ lungo $\mathbf{w}$.
Risposta $(-1, -1/2, 1/2, 1)$ ______ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 3. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1-k \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 3k-3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Sia S_k l'insieme delle soluzioni del sistema $A_k X = B_k$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui è compatibile;
  Risposta $k = 1, 7/2$ compatibile, con soluzione unica; $k \neq 1, 7/2$ non compatibile ______ **(pt.3A)**
- posto $k = 1$, si determini una base di $\mathcal{L}(S_1)$;
  Risposta $((0, 1))$ ______ **(pt.2A)**
- interpretando x e y come coordinate in $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$, si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la mutua posizione delle tre rette r, s, t, rappresentate ordinatamente dalle tre equazioni del sistema.
  Risposta $k = 1, 7/2$ fascio proprio; $k = 4$: r e t parallele e distinte, s incidente r e t; $k = 5/2$: s e t parallele e distinte, r incidente s e t; $k \neq 1, 5/2, 7/2, 4$: rette incidenti solo a due a due. ______ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino, al variare del parametro reale k, la conica $\mathcal{C}_k$: $(k+1)x^2 - 4xy + 2(k+1)y^2 - 2x + 1 = 0$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ ha due punti impropri immaginari e coniugati;
  Risposta $k < -1 - \sqrt{2} \cup k > -1 + \sqrt{2}$ ______ **(pt.2G)**
- $\mathcal{C}_k$ ha un asintoto parallelo alla retta $x - y + 2 = 0$.
  Risposta $k = 1/3$ ______ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 5. Dato il sistema $4x - (k-1)z + k - 2 = (k-1)x + (k-9)z + 3 = 0$, dove k è un parametro reale, si determinino, se possibile, i valori di k per i quali:

- il sistema rappresenta una retta di $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$;
  Risposta $k \neq 5$ ______ **(pt.1G)**
- il sistema rappresenta una retta propria di $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$;
  Risposta $k \neq -7, 5$ ______ **(pt.1G)**
- la retta rappresentata dal sistema passa per il punto $P_\infty = [(1, 0, -1, 0)]$.
  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ ______ **(pt.1G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 10/01/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	PROVA DI TEORIA ORALE ☐

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2k+2 & 4 & 2k+2 \\ 1 & 2k+2 & 1 \\ 0 & 0 & k+2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $2k, k+2, 2k+4$ ______ **(pt.1A)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali gli autovalori sono distinti;
  Risposta $k \neq \pm 2$ ______ **(pt.1A)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq 2$ ______ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si considerino i vettori $\mathbf{v} = (-1, 2, 0, 1)$ e $\mathbf{w} = (1, 3, -1, 1)$. Si determini la proiezione di $\mathbf{v}$ lungo $\mathbf{w}$.
Risposta $(1/2, 3/2, -1/2, 1/2)$ ______ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 3. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -k \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 3k \\ 1 \\ k-1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Sia S_k l'insieme delle soluzioni del sistema $A_k X = B_k$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui è compatibile;
  Risposta $k = 0, 4/3$ compatibile, con soluzione unica; $k \neq 0, 4/3$ non compatibile ______ **(pt.3A)**
- posto $k = 0$, si determini una base di $\mathcal{L}(S_0)$;
  Risposta $((1, 2))$ ______ **(pt.2A)**
- interpretando x e y come coordinate in $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$, si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la mutua posizione delle tre rette r, s, t, rappresentate ordinatamente dalle tre equazioni del sistema.
  Risposta $k = 0, 4/3$ fascio proprio; $k = 1/2$: r e t parallele e distinte, s incidente r e t; $k = 1$: s e t parallele e distinte, r incidente s e t; $k \neq 0, 1/2, 1, 4/3$: rette incidenti solo a due a due. ______ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino, al variare del parametro reale k, la conica $\mathcal{C}_k \; : \; 3kx^2 + 4xy + ky^2 + 4x + 1 = 0$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ ha due punti impropri immaginari e coniugati;
  Risposta $k < -2\sqrt{3}/3 \cup k > 2\sqrt{3}/3$ ______ **(pt.2G)**
- $\mathcal{C}_k$ ha un asintoto parallelo alla retta $x - y + 2 = 0$.
  Risposta $k = -1$ ______ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 5. Dato il sistema $2y - (k+1)z - k = (k+1)y + (k-3)z - 1 = 0$, dove k è un parametro reale, si determinino, se possibile, i valori di k per i quali:

- il sistema rappresenta una retta di $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$;
  Risposta $k \neq 1$ ______ **(pt.1G)**
- il sistema rappresenta una retta propria di $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$;
  Risposta $k \neq -5, 1$ ______ **(pt.1G)**
- la retta rappresentata dal sistema passa per il punto $P_\infty = [(0, 1, -1, 0)]$.
  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ ______ **(pt.1G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 10/01/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	PROVA DI TEORIA ORALE ☐

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2k-8 & 4 & 2k-8 \\ 1 & 2k-8 & 1 \\ 0 & 0 & k-3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $2k-10, k-3, 2k-6$ **(pt.1A)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali gli autovalori sono distinti;
  Risposta $k \neq 3, 7$ **(pt.1A)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq 7$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si considerino i vettori $\mathbf{v} = (1, 0, -1, 3)$ e $\mathbf{w} = (0, 1, 2, 1)$. Si determini la proiezione di $\mathbf{v}$ lungo $\mathbf{w}$.
Risposta $(0, 1/6, 1/3, 1/6)$ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 3. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k+1 \\ 6 \\ -6k-4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Sia S_k l'insieme delle soluzioni del sistema $A_k X = B_k$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui è compatibile;
  Risposta $k = -15/2, -1$ compatibile, con soluzione unica; $k \neq -15/2, -1$ non compatibile **(pt.3A)**
- posto $k = -1$, si determini una base di $\mathcal{L}(S_{-1})$;
  Risposta $((1, -1))$ **(pt.2A)**
- interpretando x e y come coordinate in $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$, si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la mutua posizione delle tre rette r, s, t, rappresentate ordinatamente dalle tre equazioni del sistema.
  Risposta $k = -15/2, -1$ fascio proprio; $k = 0$: r e t parallele e distinte, s incidente r e t; $k = -3/2$: s e t parallele e distinte, r incidente s e t; $k \neq -15/2, -3/2, -1, 0$: rette incidenti solo a due a due. **(pt.3G)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino, al variare del parametro reale k, la conica $\mathcal{C}_k \; : \; 2(k-1)x^2 + 2xy + (k-1)y^2 - 2x + 1 = 0$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ ha due punti impropri immaginari e coniugati;
  Risposta $k < (2-\sqrt{2})/2 \cup k > (2+\sqrt{2})/2$ **(pt.2G)**
- $\mathcal{C}_k$ ha un asintoto parallelo alla retta $x + y - 2 = 0$.
  Risposta $k = 5/3$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 5. Dato il sistema $3x - kz - k + 2 = kx + (k-6)z - 1 = 0$, dove k è un parametro reale, si determinino, se possibile, i valori di k per i quali:

- il sistema rappresenta una retta di $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$;
  Risposta $k \neq 3$ **(pt.1G)**
- il sistema rappresenta una retta propria di $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$;
  Risposta $k \neq -6, 3$ **(pt.1G)**
- la retta rappresentata dal sistema passa per il punto $P_\infty = [(1, 0, -1, 0)]$.
  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ **(pt.1G)**