UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 08/01/2020

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ k & 2k & 1 \\ k+1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Sia S_k l'insieme delle soluzioni del sistema $A_k X = B_k$.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema $A_k X = B_k$ ammette soluzione unica.
  Risposta $k \neq -1/2, 2$ **(pt.2A)**
- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali S_k è un sottospazio di dimensione 1.
  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ **(pt.2A)**
- Posto $k = 2$, si determini una base di $\mathcal{L}(S_2)$.
  Risposta $((2, -1, 0), (8, -5, 4))$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si consideri la sequenza $A = ((1, 0, -1), (2, 1, 1))$. Si completi, se possibile, A a base ortogonale di $\mathbb{R}^3$. Qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta Non è possibile perché i due vettori di A, linearmente indipendenti, non sono ortogonali **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ sia $A_k = \begin{pmatrix} k & 3 & 2k \\ 3 & k & 2k \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbb{R}^3$ ammette una base ortonormale costituita da autovettori di A_k.
Risposta $k = 0$ **(pt.1A)**

Posto $k = 2$, si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $-1, -1, 5$ **(pt.1A)**
- un autovettore relativo all'autovalore maggiore che abbia norma 2, rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^3$;
  Risposta $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ **(pt.2A)**
- una matrice D diagonale simile ad A e una relativa matrice diagonalizzante P, se tali matrici esistono.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$, è data la sfera $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 2z - 4 = 0$.

- Si determinino delle equazioni cartesiane per le due sfere Σ_1 e Σ_2 tangenti alla sfera Σ e con centro in $C(0, 1, 5)$.
  Risposta $\Sigma_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 10z - 38 = 0$, $\Sigma_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 10z + 22 = 0$ **(pt.3G)**
- Si determini la natura dei punti semplici di Σ.
  Risposta Punti semplici ellittici **(pt.1G)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino, al variare del parametro reale k, le coniche $\mathcal{C}_k : x^2 - 4xy + ky^2 + 2y - 4 = 0$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ ammette due asintoti tra loro ortogonali;
  Risposta $k = -1$ **(pt.1G)**
- il centro di $\mathcal{C}_k$ è il punto $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$;
  Risposta $k = 8$ **(pt.2G)**
- i due punti $P = (2, 1)$ e $Q = (1, 2)$ sono coniugati rispetto a $\mathcal{C}_k$.
  Risposta $k = 9/2$ **(pt.1G)**

Posto $k = 4$, si riconosca $\mathcal{C}_4$ e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, asintoti e assi.
Risposta Parabola; $C_\infty = [(2, 1, 0)]$; $5x - 10y - 2 = 0$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si considerino le rette $r : 3x + y - 3 = 0 = x + z - 1$ ed $s : x - 2y = 0 = y + z - 1$. Si determini:

- un'equazione cartesiana del piano contenente r e ortogonale a s;
  Risposta $2x + y - z - 2 = 0$ **(pt.2G)**
- un'equazione cartesiana del piano contenente r e parallelo a s.
  Risposta $4x - y + 7z - 4 = 0$ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 08/01/2020

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ k+1 & 3 & k+3 \\ 2k+2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} -1 \\ k+2 \\ k+1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Sia S_k l'insieme delle soluzioni del sistema $A_k X = B_k$.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema $A_k X = B_k$ ammette soluzione unica.
  Risposta $k \neq -11/4, 0$ **(pt.2A)**
- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali S_k è un sottospazio di dimensione 1.
  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ **(pt.2A)**
- Posto $k = 0$, si determini una base di $\mathcal{L}(S_0)$.
  Risposta $((-1, 0, 1), (6, 3, -5))$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si consideri la sequenza $A = ((1, 1, 1), (2, -1, 0))$. Si completi, se possibile, A a base ortogonale di $\mathbb{R}^3$. Qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta Non è possibile perché i due vettori di A, linearmente indipendenti, non sono ortogonali **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ sia $A_k = \begin{pmatrix} k-4 & 5 & 2k-8 \\ 5 & k-4 & 2k-8 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbb{R}^3$ ammette una base ortonormale costituita da autovettori di A_k.
Risposta $k = 4$ **(pt.1A)**

Posto $k = 5$, si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $-4, -4, 6$ **(pt.1A)**
- un autovettore relativo all'autovalore maggiore che abbia norma 1, rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^3$;
  Risposta $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$ **(pt.2A)**
- una matrice D diagonale simile ad A e una relativa matrice diagonalizzante P, se tali matrici esistono.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$, è data la sfera $\Sigma \,:\, x^2 + y^2 + z^2 - 6y - 10z + 25 = 0$.

- Si determinino delle equazioni cartesiane per le due sfere Σ_1 e Σ_2 tangenti alla sfera Σ e con centro in $C(0, -1, 2)$.
  Risposta $\Sigma_1 :\, x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 4z + 1 = 0, \qquad \Sigma_2 :\, x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 4z - 59 = 0$ **(pt.3G)**
- Si determini la natura dei punti semplici di Σ.
  Risposta Punti semplici ellittici **(pt.1G)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino, al variare del parametro reale k, le coniche $\mathcal{C}_k \,:\, (k-1)x^2 - 6xy + y^2 + 2x - 3 = 0$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ ammette due asintoti tra loro ortogonali;
  Risposta $k = 0$ **(pt.1G)**
- il centro di $\mathcal{C}_k$ è il punto $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$;
  Risposta $k = 16$ **(pt.2G)**
- i due punti $P = (2, 1)$ e $Q = (1, 2)$ sono coniugati rispetto a $\mathcal{C}_k$.
  Risposta $k = 15/2$ **(pt.1G)**

Posto $k = 10$, si riconosca $\mathcal{C}_{10}$ e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, asintoti e assi.
Risposta Parabola; $\quad C_\infty = [(1, 3, 0)]; \quad 30x - 10y + 3 = 0$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si considerino le rette $r \,:\, x + z - 3 = 0 = y - 2z - 1$ ed $s \,:\, x - 3z = 0 = y - z - 1$. Si determini:

- un'equazione cartesiana del piano contenente r e ortogonale a s;
  Risposta $3x + y + z - 10 = 0$ **(pt.2G)**
- un'equazione cartesiana del piano contenente r e parallelo a s.
  Risposta $x + 4y - 7z - 7 = 0$ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 08/01/2020

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2k+2 & k+1 \\ -1 & 4 & k+2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k+1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Sia S_k l'insieme delle soluzioni del sistema $A_k X = B_k$.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema $A_k X = B_k$ ammette soluzione unica.
  Risposta $k \neq -3/2, 1$ **(pt.2A)**
- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali S_k è un sottospazio di dimensione 1.
  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ **(pt.2A)**
- Posto $k = 1$, si determini una base di $\mathcal{L}(S_1)$.
  Risposta $((0,-1,2),(4,-5,8))$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si consideri la sequenza $A = ((1,0,3),(2,-2,-1))$. Si completi, se possibile, A a base ortogonale di $\mathbb{R}^3$. Qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta Non è possibile perché i due vettori di A, linearmente indipendenti, non sono ortogonali **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ sia $A_k = \begin{pmatrix} k+2 & 4 & 2k+4 \\ 4 & k+2 & 2k+4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbb{R}^3$ ammette una base ortonormale costituita da autovettori di A_k.
Risposta $k = -2$ **(pt.1A)**

Posto $k = 0$, si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $-2, -2, 6$ **(pt.1A)**
- un autovettore relativo all'autovalore maggiore che abbia norma 4, rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^3$;
  Risposta $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0)$ **(pt.2A)**
- una matrice D diagonale simile ad A e una relativa matrice diagonalizzante P, se tali matrici esistono.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$, è data la sfera $\Sigma \ : \ x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 10z + 28 = 0$.

- Si determinino delle equazioni cartesiane per le due sfere Σ_1 e Σ_2 tangenti alla sfera Σ e con centro in $C(-1,0,1)$.
  Risposta $\Sigma_1 : \ x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 34 = 0, \qquad \Sigma_2 : \ x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 14 = 0$ **(pt.3G)**
- Si determini la natura dei punti semplici di Σ.
  Risposta Punti semplici ellittici **(pt.1G)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino, al variare del parametro reale k, le coniche $\mathcal{C}_k \ : \ x^2 - 4xy + (k-2)y^2 - 2y - 2 = 0$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ ammette due asintoti tra loro ortogonali;
  Risposta $k = 1$ **(pt.1G)**
- il centro di $\mathcal{C}_k$ è il punto $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$;
  Risposta $k = 2$ **(pt.2G)**
- i due punti $P = (2,1)$ e $Q = (1,2)$ sono coniugati rispetto a $\mathcal{C}_k$.
  Risposta $k = 17/2$ **(pt.1G)**

Posto $k = 6$, si riconosca $\mathcal{C}_6$ e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, asintoti e assi.
Risposta Parabola; $\quad C_\infty = [(2,1,0)]; \quad 5x - 10y + 2 = 0$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si considerino le rette $r \ : \ x + y - 2 = 0 = y - z + 2$ ed $s \ : \ 2x + y = 0 = 3x - z + 1$. Si determini:

- un'equazione cartesiana del piano contenente r e ortogonale a s;
  Risposta $x - 2y + 3z - 8 = 0$ **(pt.2G)**
- un'equazione cartesiana del piano contenente r e parallelo a s.
  Risposta $5x + 4y + z - 12 = 0$ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 08/01/2020

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & k+1 & k-1 \\ 1 & 3 & 2k-2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} -1 \\ k \\ k-1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Sia S_k l'insieme delle soluzioni del sistema $A_k X = B_k$.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema $A_k X = B_k$ ammette soluzione unica.
  Risposta $k \neq -3/4, 2$ **(pt.2A)**
- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali S_k è un sottospazio di dimensione 1.
  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ **(pt.2A)**
- Posto $k = 2$, si determini una base di $\mathcal{L}(S_2)$.
  Risposta $((0,1,-1),(3,-5,6))$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si consideri la sequenza $A = ((2,0,3),(-1,1,1))$. Si completi, se possibile, A a base ortogonale di $\mathbb{R}^3$. Qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta Non è possibile perché i due vettori di A, linearmente indipendenti, non sono ortogonali **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ sia $A_k = \begin{pmatrix} k-1 & 2 & 2k-2 \\ 2 & k-1 & 2k-2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbb{R}^3$ ammette una base ortonormale costituita da autovettori di A_k.
Risposta $k = 1$ **(pt.1A)**

Posto $k = 2$, si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $-1, -1, 3$ **(pt.1A)**
- un autovettore relativo all'autovalore maggiore che abbia norma 2, rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^3$;
  Risposta $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ **(pt.2A)**
- una matrice D diagonale simile ad A e una relativa matrice diagonalizzante P, se tali matrici esistono.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$, è data la sfera $\Sigma \,:\, x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z - 4 = 0$.

- Si determinino delle equazioni cartesiane per le due sfere Σ_1 e Σ_2 tangenti alla sfera Σ e con centro in $C(0,-2,2)$.
  Risposta $\Sigma_1 : x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 4z - 56 = 0$, $\Sigma_2 : x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 4z + 4 = 0$ **(pt.3G)**
- Si determini la natura dei punti semplici di Σ.
  Risposta Punti semplici ellittici **(pt.1G)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino, al variare del parametro reale k, le coniche $\mathcal{C}_k \,:\, (k+1)x^2 - 6xy + y^2 + 4x - 4 = 0$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ ammette due asintoti tra loro ortogonali;
  Risposta $k = -2$ **(pt.1G)**
- il centro di $\mathcal{C}_k$ è il punto $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$;
  Risposta $k = 20$ **(pt.2G)**
- i due punti $P = (2,1)$ e $Q = (1,2)$ sono coniugati rispetto a $\mathcal{C}_k$.
  Risposta $k = 9/2$ **(pt.1G)**

Posto $k = 8$, si riconosca $\mathcal{C}_8$ e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, asintoti e assi.
Risposta Parabola; $C_\infty = [(1,3,0)]$; $15x - 5y + 3 = 0$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si considerino le rette $r \,:\, x + y - 1 = 0 = 3y + z - 3$ ed $s \,:\, x + z - 1 = 0 = y - 2z$. Si determini:

- un'equazione cartesiana del piano contenente r e ortogonale a s;
  Risposta $x - 2y - z + 2 = 0$ **(pt.2G)**
- un'equazione cartesiana del piano contenente r e parallelo a s.
  Risposta $7x + 4y - z - 4 = 0$ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 08/01/2020

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ k-2 & 1 & 2k-4 \\ k-1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k-2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Sia S_k l'insieme delle soluzioni del sistema $A_k X = B_k$.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema $A_k X = B_k$ ammette soluzione unica.
  Risposta $k \neq 3/2, 4$ **(pt.2A)**
- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali S_k è un sottospazio di dimensione 1.
  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ **(pt.2A)**
- Posto $k = 4$, si determini una base di $\mathcal{L}(S_4)$.
  Risposta $((2,0,-1),(8,4,-5))$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si consideri la sequenza $A = ((2,1,1),(-1,0,1))$. Si completi, se possibile, A a base ortogonale di $\mathbb{R}^3$. Qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta Non è possibile perché i due vettori di A, linearmente indipendenti, non sono ortogonali **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ sia $A_k = \begin{pmatrix} k+3 & 5 & 2k+6 \\ 5 & k+3 & 2k+6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbb{R}^3$ ammette una base ortonormale costituita da autovettori di A_k.
Risposta $k = -3$ **(pt.1A)**

Posto $k = -1$, si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $-3, -3, 7$ **(pt.1A)**
- un autovettore relativo all'autovalore maggiore che abbia norma 1, rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^3$;
  Risposta $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$ **(pt.2A)**
- una matrice D diagonale simile ad A e una relativa matrice diagonalizzante P, se tali matrici esistono.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$, è data la sfera $\Sigma \ : \ x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y + 4 = 0$.

- Si determinino delle equazioni cartesiane per le due sfere Σ_1 e Σ_2 tangenti alla sfera Σ e con centro in $C(-2,1,0)$.
  Risposta $\Sigma_1 : \ x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 76 = 0$, $\Sigma_2 : \ x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 4 = 0$ **(pt.3G)**
- Si determini la natura dei punti semplici di Σ.
  Risposta Punti semplici ellittici **(pt.1G)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino, al variare del parametro reale k, le coniche $\mathcal{C}_k \ : \ x^2 - 4xy + (k+2)y^2 + 2y - 4 = 0$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ ammette due asintoti tra loro ortogonali;
  Risposta $k = -3$ **(pt.1G)**
- il centro di $\mathcal{C}_k$ è il punto $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$;
  Risposta $k = 6$ **(pt.2G)**
- i due punti $P = (2,1)$ e $Q = (1,2)$ sono coniugati rispetto a $\mathcal{C}_k$.
  Risposta $k = 5/2$ **(pt.1G)**

Posto $k = 2$, si riconosca $\mathcal{C}_2$ e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, asintoti e assi.
Risposta Parabola; $C_\infty = [(2,1,0)]$; $5x - 10y - 2 = 0$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si considerino le rette $r \ : \ 2x - z + 1 = 0 = x + y - 3$ ed $s \ : \ 3x - y = 0 = x - z + 1$. Si determini:

- un'equazione cartesiana del piano contenente r e ortogonale a s;
  Risposta $x + 3y + z - 10 = 0$ **(pt.2G)**
- un'equazione cartesiana del piano contenente r e parallelo a s.
  Risposta $7x - y - 4z + 7 = 0$ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 08/01/2020

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ k & k+2 & 3 \\ 2k & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} -1 \\ k+1 \\ k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Sia S_k l'insieme delle soluzioni del sistema $A_k X = B_k$.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema $A_k X = B_k$ ammette soluzione unica.
  Risposta $k \neq -7/4, 1$ **(pt.2A)**
- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali S_k è un sottospazio di dimensione 1.
  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ **(pt.2A)**
- Posto $k = 1$, si determini una base di $\mathcal{L}(S_1)$.
  Risposta $((-1, 1, 0), (6, -5, 3))$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si consideri la sequenza $A = ((1, 3, -2), (1, 0, 1))$. Si completi, se possibile, A a base ortogonale di $\mathbb{R}^3$. Qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta Non è possibile perché i due vettori di A, linearmente indipendenti, non sono ortogonali **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ sia $A_k = \begin{pmatrix} k-2 & 3 & 2k-4 \\ 3 & k-2 & 2k-4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbb{R}^3$ ammette una base ortonormale costituita da autovettori di A_k.
Risposta $k = 2$ **(pt.1A)**

Posto $k = 3$, si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $-2, -2, 4$ **(pt.1A)**
- un autovettore relativo all'autovalore maggiore che abbia norma 4, rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^3$;
  Risposta $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0)$ **(pt.2A)**
- una matrice D diagonale simile ad A e una relativa matrice diagonalizzante P, se tali matrici esistono.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$, è data la sfera $\Sigma \ : \ x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 4z + 13 = 0$.

- Si determinino delle equazioni cartesiane per le due sfere Σ_1 e Σ_2 tangenti alla sfera Σ e con centro in $C(1, 0, -1)$.
  Risposta $\Sigma_1 : \ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 79 = 0$, $\Sigma_2 : \ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$ **(pt.3G)**
- Si determini la natura dei punti semplici di Σ.
  Risposta Punti semplici ellittici **(pt.1G)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino, al variare del parametro reale k, le coniche $\mathcal{C}_k \ : \ (k-2)x^2 - 6xy + y^2 + 2x - 3 = 0$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ ammette due asintoti tra loro ortogonali;
  Risposta $k = 1$ **(pt.1G)**
- il centro di $\mathcal{C}_k$ è il punto $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$;
  Risposta $k = 17$ **(pt.2G)**
- i due punti $P = (2, 1)$ e $Q = (1, 2)$ sono coniugati rispetto a $\mathcal{C}_k$.
  Risposta $k = 17/2$ **(pt.1G)**

Posto $k = 11$, si riconosca $\mathcal{C}_{11}$ e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, asintoti e assi.
Risposta Parabola; $C_\infty = [(1, 3, 0)]$; $30x - 10y + 3 = 0$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si considerino le rette $r \ : \ x - z - 2 = 0 = y + z - 2$ ed $s \ : \ x - 3y - 1 = 0 = 2y + z$. Si determini:

- un'equazione cartesiana del piano contenente r e ortogonale a s;
  Risposta $3x + y - 2z - 8 = 0$ **(pt.2G)**
- un'equazione cartesiana del piano contenente r e parallelo a s.
  Risposta $x + 5y + 4z - 12 = 0$ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 08/01/2020

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2k+4 & k+2 & 1 \\ 4 & k+3 & -1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k+2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Sia S_k l'insieme delle soluzioni del sistema $A_k X = B_k$.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema $A_k X = B_k$ ammette soluzione unica.
  Risposta $k \neq -5/2, 0$ **(pt.2A)**
- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali S_k è un sottospazio di dimensione 1.
  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ **(pt.2A)**
- Posto $k = 0$, si determini una base di $\mathcal{L}(S_0)$.
  Risposta $((-1, 2, 0), (-5, 8, 4))$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si consideri la sequenza $A = ((4, 1, -1), (0, 1, -1))$. Si completi, se possibile, A a base ortogonale di $\mathbb{R}^3$. Qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta Non è possibile perché i due vettori di A, linearmente indipendenti, non sono ortogonali **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ sia $A_k = \begin{pmatrix} k+4 & 6 & 2k+8 \\ 6 & k+4 & 2k+8 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbb{R}^3$ ammette una base ortonormale costituita da autovettori di A_k.
Risposta $k = -4$ **(pt.1A)**

Posto $k = -2$, si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $-4, -4, 8$ **(pt.1A)**
- un autovettore relativo all'autovalore maggiore che abbia norma 2, rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^3$;
  Risposta $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ **(pt.2A)**
- una matrice D diagonale simile ad A e una relativa matrice diagonalizzante P, se tali matrici esistono.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$, è data la sfera $\Sigma \ : \ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

- Si determinino delle equazioni cartesiane per le due sfere Σ_1 e Σ_2 tangenti alla sfera Σ e con centro in $C(-2, 2, 0)$.
  Risposta $\Sigma_1 : \ x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4y - 41 = 0, \qquad \Sigma_2 : \ x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4y - 1 = 0$ **(pt.3G)**
- Si determini la natura dei punti semplici di Σ.
  Risposta Punti semplici ellittici **(pt.1G)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino, al variare del parametro reale k, le coniche $\mathcal{C}_k \ : \ x^2 - 4xy + (k+1)y^2 + 2y - 4 = 0$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ ammette due asintoti tra loro ortogonali;
  Risposta $k = -2$ **(pt.1G)**
- il centro di $\mathcal{C}_k$ è il punto $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$;
  Risposta $k = 7$ **(pt.2G)**
- i due punti $P = (2, 1)$ e $Q = (1, 2)$ sono coniugati rispetto a $\mathcal{C}_k$.
  Risposta $k = 7/2$ **(pt.1G)**

Posto $k = 3$, si riconosca $\mathcal{C}_3$ e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, asintoti e assi.
Risposta Parabola; $C_\infty = [(2, 1, 0)]$; $5x - 10y - 2 = 0$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si considerino le rette $r \ : \ y + z - 1 = 0 = x + 3z - 3$ ed $s \ : \ x + y - 1 = 0 = 2x - z$. Si determini:

- un'equazione cartesiana del piano contenente r e ortogonale a s;
  Risposta $x - y + 2z - 2 = 0$ **(pt.2G)**
- un'equazione cartesiana del piano contenente r e parallelo a s.
  Risposta $x - 7y - 4z + 4 = 0$ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 08/01/2020

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k & k-2 & 3 \\ 3 & 2k-4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k-1 \\ k-2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Sia S_k l'insieme delle soluzioni del sistema $A_k X = B_k$.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema $A_k X = B_k$ ammette soluzione unica.
  Risposta $k \neq 1/4, 3$ **(pt.2A)**
- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali S_k è un sottospazio di dimensione 1.
  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ **(pt.2A)**
- Posto $k = 3$, si determini una base di $\mathcal{L}(S_3)$.
  Risposta $((1,-1,0),(-5,6,3))$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si consideri la sequenza $A = ((2,0,2),(-1,1,0))$. Si completi, se possibile, A a base ortogonale di $\mathbb{R}^3$. Qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta Non è possibile perché i due vettori di A, linearmente indipendenti, non sono ortogonali **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ sia $A_k = \begin{pmatrix} k-3 & 4 & 2k-6 \\ 4 & k-3 & 2k-6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbb{R}^3$ ammette una base ortonormale costituita da autovettori di A_k.
Risposta $k = 3$ **(pt.1A)**

Posto $k = 4$, si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $-3, -3, 5$ **(pt.1A)**
- un autovettore relativo all'autovalore maggiore che abbia norma 1, rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^3$;
  Risposta $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$ **(pt.2A)**
- una matrice D diagonale simile ad A e una relativa matrice diagonalizzante P, se tali matrici esistono.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$, è data la sfera $\Sigma \ : \ x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 10y + 33 = 0$.

- Si determinino delle equazioni cartesiane per le due sfere Σ_1 e Σ_2 tangenti alla sfera Σ e con centro in $C(-1,2,0)$.
  Risposta $\Sigma_1 : \ x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 31 = 0$, $\Sigma_2 : \ x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 11 = 0$ **(pt.3G)**
- Si determini la natura dei punti semplici di Σ.
  Risposta Punti semplici ellittici **(pt.1G)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino, al variare del parametro reale k, le coniche $\mathcal{C}_k \ : \ x^2 - 4xy + (k-1)y^2 - 2y - 2 = 0$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ ammette due asintoti tra loro ortogonali;
  Risposta $k = 0$ **(pt.1G)**
- il centro di $\mathcal{C}_k$ è il punto $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$;
  Risposta $k = 1$ **(pt.2G)**
- i due punti $P = (2,1)$ e $Q = (1,2)$ sono coniugati rispetto a $\mathcal{C}_k$.
  Risposta $k = 15/2$ **(pt.1G)**

Posto $k = 5$, si riconosca $\mathcal{C}_5$ e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, asintoti e assi.
Risposta Parabola; $C_\infty = [(2,1,0)]$; $5x - 10y + 2 = 0$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si considerino le rette $r \ : \ x - 2y - 1 = 0 = y + z - 3$ ed $s \ : \ x - y - 1 = 0 = 3y - z$. Si determini:

- un'equazione cartesiana del piano contenente r e ortogonale a s;
  Risposta $x + y + 3z - 10 = 0$ **(pt.2G)**
- un'equazione cartesiana del piano contenente r e parallelo a s.
  Risposta $4x - 7y + z - 7 = 0$ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 08/01/2020

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & k-1 & 2k-2 \\ -1 & k & 4 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k-1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Sia S_k l'insieme delle soluzioni del sistema $A_k X = B_k$.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema $A_k X = B_k$ ammette soluzione unica.
  Risposta $k \neq 1/2, 3$ **(pt.2A)**
- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali S_k è un sottospazio di dimensione 1.
  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ **(pt.2A)**
- Posto $k = 3$, si determini una base di $\mathcal{L}(S_3)$.
  Risposta $((0, 2, -1), (4, 8, -5))$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si consideri la sequenza $A = ((1, 1, -1), (-1, 1, 1))$. Si completi, se possibile, A a base ortogonale di $\mathbb{R}^3$. Qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta Non è possibile perché i due vettori di A, linearmente indipendenti, non sono ortogonali **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ sia $A_k = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & 2k+2 \\ 1 & k+1 & 2k+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbb{R}^3$ ammette una base ortonormale costituita da autovettori di A_k.
Risposta $k = -1$ **(pt.1A)**

Posto $k = 1$, si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $1, 1, 3$ **(pt.1A)**
- un autovettore relativo all'autovalore maggiore che abbia norma 4, rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^3$;
  Risposta $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0)$ **(pt.2A)**
- una matrice D diagonale simile ad A e una relativa matrice diagonalizzante P, se tali matrici esistono.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$, è data la sfera $\Sigma \,:\, x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4z + 16 = 0$.

- Si determinino delle equazioni cartesiane per le due sfere Σ_1 e Σ_2 tangenti alla sfera Σ e con centro in $C(1, 0, -2)$.
  Risposta $\Sigma_1 : \; x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 44 = 0, \qquad \Sigma_2 : \; x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 4 = 0$ **(pt.3G)**
- Si determini la natura dei punti semplici di Σ.
  Risposta Punti semplici ellittici **(pt.1G)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino, al variare del parametro reale k, le coniche $\mathcal{C}_k \,:\, kx^2 - 6xy + y^2 + 4x - 4 = 0$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ ammette due asintoti tra loro ortogonali;
  Risposta $k = -1$ **(pt.1G)**
- il centro di $\mathcal{C}_k$ è il punto $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$;
  Risposta $k = 21$ **(pt.2G)**
- i due punti $P = (2, 1)$ e $Q = (1, 2)$ sono coniugati rispetto a $\mathcal{C}_k$.
  Risposta $k = 11/2$ **(pt.1G)**

Posto $k = 9$, si riconosca $\mathcal{C}_9$ e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, asintoti e assi.
Risposta Parabola; $C_\infty = [(1, 3, 0)]$; $15x - 5y + 3 = 0$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si considerino le rette $r \,:\, x - y + 2 = 0 = x + z - 2$ ed $s \,:\, x + 2z = 0 = y - 3z - 1$. Si determini:

- un'equazione cartesiana del piano contenente r e ortogonale a s;
  Risposta $2x - 3y - z + 8 = 0$ **(pt.2G)**
- un'equazione cartesiana del piano contenente r e parallelo a s.
  Risposta $4x + y + 5z - 12 = 0$ **(pt.2G)**