Esercizio 1

Dato l'insieme A di $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \left(\begin{pmatrix} \alpha & -2 \\ -2\alpha & 0 \end{pmatrix} \quad | \quad \alpha \in R \right)$$

a) determinare L(A), una base e dimensione;

b) determinare le componenti della seguente matrice di L(A) rispetto alla base scelta

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix};$$

c) determinare un complemento diretto di L(A).

Svolgimento

a)

$$L(A) = \left(\begin{pmatrix} \alpha & -2s \\ -2\alpha & 0 \end{pmatrix} \quad | \quad \alpha, s \in R \right)$$

Una base è: $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \text{ e dim L(A)=2}}$.

b) …

c) Estraggo dalla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$ la sequenza C di matrici

$$C = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \right).$$

L'insieme delle 4 matrici è libero

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ implica

$\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$.

4 matrici l.ind. di $M_2(\mathbb{R}) \Rightarrow$ una base di $M_2(\mathbb{R})$.

(In alternativa si può lavorare con le componenti rispetto alla base canonica …)

Indico con L(C) la copertura lineare di C. L(C) è uno dei possibili complementi diretti richiesti, infatti

1) $L(C)+L(A)= M_2(\mathbb{R})$,

2) $\dim[L(C)\cap L(A)]=\dim L(C)+\dim L(A)-\dim[L(C)+L(A)]=$

$$=2+2-4=0 \quad \Rightarrow \quad L(C)\cap L(A)= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

…

Esercizio 2

Per quali valori di h, numero reale, la sequenza A=((h,h,2h+1,h), (h,h,2h,h), (h,0,h-1,h)) è legata?

Svolgimento:

A è legata se e solo se il rango della matrice delle componenti ha rango minore di 3 (tutti i minori di ordine 3 devono avere il determinante nullo)

$$\begin{pmatrix} h & h & h \\ h & h & 0 \\ 2h+1 & 2h & h-1 \\ h & h & h \end{pmatrix}$$

Poiché la I e la IV riga coincidono la condizione richiesta è soddisfatta se e solo se il determinante del minore estratto togliendo la quarta riga è nullo.

$$\begin{vmatrix} h & h & h \\ h & h & 0 \\ 2h+1 & 2h & h-1 \end{vmatrix} = h^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2h+1 & 2h & h-1 \end{vmatrix} = h^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2h+1 & 2h & h-1 \end{vmatrix} = h^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2h+1 & 2h \end{vmatrix}$$

$$= -h^2$$

A è legata se e solo se **… , k**$\in\mathbb{R}$.

Esercizio 3

Determinare per quali valori di k la sequenza A è libera, dove A=((1,2,2-k,2), (1,1-k,0,k-1), (0,2-k,2-k,0)).

Svolgimento:

Al contrario A è libera se la matrice delle componenti ha rango 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1-k & 2-k \\ 2-k & 0 & 2-k \\ 2 & k-1 & 0 \end{pmatrix}$$

Estraggo un minore di ordine 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1-k & 2-k \\ 2 & k-1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il suo determinante è (k-2)(k-3) ed è diverso da 0 se e solo se **k≠2 e k≠3**. Per tali valori il rango è sicuramente 3.

Per k=2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{il rango è 2}$$

Per k=3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{il rango è 3}$$

perchè il minore di 3° ordine ottenuto togliendo la IV riga ha determinante diverso da 0.

A è libera se e solo se **…, k**$\in\mathbb{R}$.

Esercizio 4

Dati i sottoinsiemi:

A={(1,0,2,3),(0,1,0,1),(1,1,2,4)} e B={(0,0,2,k),(3,2,3,1)}

dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, si trovi per quali valori reali di k, $\mathbb{R}^4(\mathbb{R}) = L(A) \oplus L(B)$.

Svolgimento:

Determiniamo la dimensione e una base di L(A):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ha rango 2}$$

Perché il minore $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha il determinante diverso da 0, mentre i due minori che si ottengono orlando con la III o IV riga hanno determinante nullo (la terza colonna è la prima colonna sommata alla seconda).

$\boxed{\text{dim L(A)=2 e una sua base è ((1,0,2,3),(0,1,0,1)).}}$

Determiniamo la dimensione e una base di L(B):

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \\ 2 & 3 \\ k & 1 \end{pmatrix} \text{ha rango 2}$$

Perché il minore $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ha determinante diverso da 0 per ogni k. $\boxed{\text{dim L(B)=2 e una sua base è B}}$.

Ora i vettori della base di L(A) insieme ai vettori di B devono generare $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$=L(A)+L(B).

((1,0,2,3),(0,1,0,1),(0,0,2,k),(3,2,3,1)) è base per $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ se e solo se il rango di

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & k & 1 \end{pmatrix} \text{ è } 4$$

Calcolando il determinante e imponendolo diverso da 0 si ottiene k≠….. Per tale valore la dimensione di L(A)∩L(B) è 0 (per la formula di Grassmann), quindi:

$$\left. \begin{array}{r} L(A)+L(B)=R^4 \\ L(A)\cap L(B)=\{(0,0,0,0)\} \end{array} \right\} \Leftrightarrow L(A)\oplus L(B)=R^4$$

Risposta: per **k≠…., k∈ℝ.**

Analoghi esercizi possono essere fatti con le matrici:

Esercizio 5

Per quali valori di k reali la sequenza di queste tre matrici di $M_2(\mathbb{R})$ è legata?

$$A=\left\{\begin{pmatrix} h & h \\ 2h+1 & h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h & h \\ 2h & h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h & 0 \\ h-1 & h \end{pmatrix}\right\}$$

Svolgimento: rispetto alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

le componenti di queste tre matrici sono: (h,h,2h+1,h), (h,h,2h,h), (h,0,h-1,h) dati equivalenti all'esercizio 2.

Risposta:

A è legata se e solo se …., k$\in\mathbb{R}$.

SISTEMI LINEARI

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{m,1}x_1 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

Un sistema lineare di m equazioni con n incognite (di primo grado), ha una scrittura equivalente con le matrici AX=B (♦), dove:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{x}_\mathrm{n} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{b}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{b}_\mathrm{m} \end{pmatrix}$$

Un sistema si dice **compatibile se ammette soluzioni**.

Indichiamo con A|B

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)$$

la matrice completa del sistema.

Il teorema di **Rouché-Capelli** afferma che un sistema (♦) ammette soluzioni se e solo se **ρ(A|B)=ρ(A).**

Osservazione 1

Un **sistema omogeneo** (B=**0** colonna nulla) ha sempre soluzione perché ρ(A|**0**)=ρ(A). Sicuramente ha la soluzione banale (n-upla nulla). Se ha altre soluzioni diverse da quella banale, queste si chiamano **autosoluzioni**.

Osservazione 2

Se ρ(A|B)=ρ(A)=k allora il sistema ammette:

- se **n=k**, una soluzione,
- se **n>k** , ∞^{n-k} soluzioni (dipendenti da n-k parametri).

Osservazione 3

Se n=m=k il sistema di dice di Cramer e ammette una soluzione ottenuta

$$X^t = \left(\frac{|A_{x_1}|}{|A|}, \ldots, \frac{|A_{x_n}|}{|A|} \right)$$

Dove le matrici A_{xi} sono quelle ottenute da A sostituendo alla colonna dei coefficienti della i-esima incognita la colonna dei termini noti.

Esercizio 1 (sistema omogeneo n<m)

Discutere e risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

La matrice incompleta del sistema è:

$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ e ha rango 3 **k=3=n** (m=4) il sistema ha una sola soluzione, dunque banale $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$.

S={(0,0,0)}.

Esercizio 2 (sistema omogeneo n=m)

Discutere e risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

La matrice incompleta del sistema è:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$ ha rango **2=k,** **n=3**, m=3;

il sistema ha $\infty^{n-k} = \infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni (dipendenti da un parametro).

Risolvendo **un sistema principale equivalente**:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = x_3 \\ x_1 + x_2 = -x_3 \end{cases} \quad dove \quad x_3 = \alpha \qquad \begin{cases} x_1 = -4\alpha \\ x_2 = 3\alpha \end{cases}$$

Il sistema ha autosoluzioni $S = \{(-4\alpha, 3\alpha, \alpha)\} \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 (sistema omogeneo n>m)

Discutere e risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4+x_5=0 \\ x_2+x_3+x_5=0 \\ 2x_1+2x_2-2x_3+x_4=0 \end{cases}$$

La matrice incompleta del sistema è:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ ha rango **2=k, n=5, m=3**

il sistema ha $\infty^{n-k}=\infty^{5-2}=\infty^3$ soluzioni (dipendenti da 3 parametri). Un **sistema principale equivalente**

$$\begin{cases} x_5=-x_2-x_3 \\ x_4=-2x_1-2x_2+2x_3 \end{cases} \quad dove\ \ x_1=\alpha,\ x_2=\beta,\ x_3=\gamma$$

$$\begin{cases} x_5=-\beta-\gamma \\ x_4=-2\alpha-2\beta+2\gamma \end{cases}$$

Il sistema ha autosoluzioni:

$S=\{(\alpha,\beta,\gamma,-2\alpha-2\beta+2\gamma,-\beta-\gamma)\}\ \ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}.$

Esercizio: risolvere, se possibile, i seguenti sistemi

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \\ 2x_1+2x_2-2x_3=0 \end{cases};\ \begin{cases} 3x_1+x_2-x_3+x_4+x_5=0 \\ x_1+x_2+x_3+x_5=0 \\ x_1+2x_2-2x_3+x_4=0 \end{cases};\ \begin{cases} 2x_1+8x_2=0 \\ x_1+4x_2+=0 \\ -x_1-4x_2=0 \end{cases}.$$