Esercizio 1 (rango)

In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si dica per quali valori reali di k il vettore **v**=(0,k-1,k-1,2) appartiene allo spazio vettoriale generato da

((0, k-1, k-1, k-1), (0, 0, k-2, 2k-4), (0, 0, 0, 2k-4)).

Svolgimento: **dim L(A)=ρ(B)** al variare di k dove

A=((0, k-1, k-1, k-1), (0, 0, k-2, 2k-4), (0, 0, 0, 2k-4))

e

$$B=\begin{pmatrix} 0 & k-1 & k-1 & k-1 \\ 0 & 0 & k-2 & 2k-4 \\ 0 & 0 & 0 & 2k-4 \end{pmatrix}$$

♦ Per k≠1 e k≠2 il rango di tale matrice è 3 ed A è una base per la sua copertura lineare.

♦ Per k=1 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ il rango della matrice è 2, una base per la copertura è ((0,0,-1,-2),(0,0,0,-2)).

♦ Per k= 2 $\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ il rango della matrice è 1 e una base per la copertura è ((0,1,1,1)).

Allora **k≠1 e k≠2** il vettore appartiene a L(A) se e solo se la matrice delle componenti del vettore **v** e dei vettori della base di L(A) continua ad avere rango 3.

$$\rho\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{k}-1 & \mathrm{k}-1 & \mathrm{k}-1 \\ 0 & 0 & \mathrm{k}-2 & 2\mathrm{k}-4 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mathrm{k}-4 \\ 0 & \mathrm{k}-1 & \mathrm{k}-1 & 2 \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} k-1 & k-1 & k-1 \\ 0 & k-2 & 2k-4 \\ 0 & 0 & 2k-4 \\ k-1 & k-1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= 3.$$

Per **k=1** il vettore appartiene a L(A) se e solo se la matrice delle componenti del vettore **v** e dei vettori della base di L(A) continua ad avere rango 2.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ha rango 2.

Per **k=2** il vettore appartiene a L(A) se e solo se la matrice delle componenti del vettore **v** e dei vettori della base di L(A) continua ad avere rango 1.

Mentre

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ha rango 2.}$$

Il vettore non appartiene a L(A).

Conclusione: il vettore appartiene a L(A) per ogni k reale con **k≠...**

Esercizi da svolgere

1) Si determini il rango delle seguenti matrici:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Si determini, al variare di k nei reali, il rango di

$$A=\begin{pmatrix} 1 & k-1 & 2 & k-2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ k & 0 & 2 & k-2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & -h & 1 \\ 3h & 0 & 1 \\ h & 2-h & 3 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} k & 0 & 1-k & 1 & k+1 \\ k & k & 0 & 0 & k \\ 2 & k & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Siano U e W due sottospazi vettoriali di V su $\mathbb{K}$, restano definite due operazioni:

$$\mathbf{U + W = \{ u{+}w \in V \mid u \in U, w \in W \}}$$

$$\mathbf{U \cap W = \{ v \in V \mid v \in U \wedge v \in W \}}$$

Si dimostra che

U+W e U∩W sono **sottospazi vettoriali** di V.

Attenzione: U∪W non è spazio vettoriale.

Formula del teorema di Grassmann

$$\dim [U + W] = \dim U + \dim W - \dim [U \cap W]$$

Esercizio 1

Dati i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$

$$U = \{(\alpha,0,-\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},\ W = \{(0,3\gamma,\delta) \mid \gamma, \delta \in \mathbb{R}\},$$

determinare U+W e U∩W.

Svolgimento:

determiniamo una base di U e una di W per conoscere le dimensioni dei relativi spazi …:

$$B_U=((1,0,0),(0,0,-1)) \text{ e } B_W=((0,3,0),(0,0,1)).$$

In $U \cap W$ si trovano i vettori per i quali esistono gli scalari $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$

$$\text{tali che } \underbrace{(\alpha,0,-\beta)}_{\in U}= \underbrace{(0,3\gamma,\delta)}_{\in W} \in U\cap W$$

$$\Rightarrow \alpha=0 , \beta = - \delta, \gamma=0.$$

Allora $U \cap W=\{(0, 0, \delta) \mid \delta\in\mathbb{R}\}$ e una base di $B_{U \cap W}$ è $((0,0,1))$ con $\dim[U \cap W]=1$.

Il teorema di Grassmann indica che la dimensione di U+W è 3, infatti

$$\dim[U + W]=\dim U+\dim W - \dim [U \cap W]=2+2-1.$$

L'unico sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 3 è $\mathbb{R}^3$ stesso: $U+W= \mathbb{R}^3$.

Allo stesso risultato si perveniva andando a verificare che $L((1,0,0),(0,0,-1),(0,3,0),(0,0,1))=L((1,0,0),(0,3,0),(0,0,1))= \mathbb{R}^3$.

Esercizio 2

Dati i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$

$$U = \{(\alpha,0,-\beta,3\alpha) \mid \alpha, \beta\in\mathbb{R}\},\ W = \{(0,2\gamma,\delta,0) \mid \gamma, \delta\in\mathbb{R}\}$$

determinare U+W e $U\cap W$.

Svolgimento.

Le basi di U e W: $B_U=((1,0,0,3),(0,0,-1,0))$

$B_W=((0,2,0,0),(0,0,1,0))$.

In $U \cap W$ si trovano i vettori per i quali esistono

$\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ tali che $(\alpha, 0, -\beta, 3\alpha)=(0, 2\gamma, \delta, 0)$

$$\Rightarrow\ \alpha=0\ ,\ \beta = - \delta,\ \gamma=0$$

$$\boxed{U \cap W=\{(0, 0, \ldots, 0) \mid \delta\in\mathbb{R}\}}$$

e una base $B_{U \cap W} =((0,0,1,0))$ con $\dim U \cap W=1$.

Il teorema di Grassmann indica che la dimensione di U+W è 3 ed infatti i generatori di U+W

$$\{(1,0,0,3),\underline{(0,0,-1,0)},(0,2,0,0),\underline{(0,0,1,0)}\}$$

costituiscono un insieme legato. Allora consideriamo

$$\{(1,0,0,3),(0,2,0,0),(0,0,1,0)\}:$$

tale insieme è formato da generatori di U+W.

I vettori sono anche linearmente indipendenti:

$$\rho\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Quindi ((1,0,0,3),(0,2,0,0),(0,0,1,0)) è una base per U+W:

U +W= {(.., .., .., ..) | x,y,z$\in\mathbb{R}$}.

Somma diretta

Siano U e W due sottospazi vettoriali di V su $\mathbb{K}$,

V=U⊕W (ogni **v**$\in$V esistono unici **u**$\in$U e **w**$\in$W tali che **v**=**u**+**w**) se e solo se U+W=V e U$\cap$W={$\underline{\mathbf{0}}$}.

Esercizio 3

Con riferimento all'esercizio 2, determinare un sottospazio T di $\mathbb{R}^4$ tale che $T \oplus U = \mathbb{R}^4$.

Scrivere il vettore **v**=(1,1,1,1) come somma di due vettori **t** e **u** tali che **v**=**t**+**u** con **t**$\in$T e **u**$\in$U.

Sono unici?

Svolgimento.

T deve essere un sottospazio vettoriale di dim.2 perché $\dim T = \dim(T+U) + \dim(T \cap U) - \dim U = 4+0-2$ (formula del t.di Grassmann).

I vettori di T dovranno avere la seconda entrata non necessariamente nulla.

Selezioniamo allora i vettori (0,1,0,0) e (0,0,0,1) dalla base canonica di $\mathbb{R}^4$: essi generano vettori del tipo

$$x(0,1,0,0)+y(0,0,0,1)=(0,x,0,y) \text{ con } x,y\in\mathbb{R}.$$

$T=\{(0,x,0,y)|\ x,y\in\mathbb{R}\}$ è uno dei possibili sottospazi vettoriali con le caratteristiche richieste:

a) dim T=2 (generato da (0,1,0,0), (0,0,0,1) lin. ind.).

b) i vettori ((0,1,0,0),(0,0,0,1),(1,0,0,3),(0,0,-1,0)) sono generatori di T+U e linearmente indipendenti (da verificare…). $T+U=\mathbb{R}^4$. Per il teorema di Grassmann

$$\dim [T\cap U]=0 \Rightarrow T\cap U=\{(0,0,0,0)\} \text{ da cui } T\oplus U= \mathbb{R}^4.$$

Ovviamente T non è unico: avremmo potuto scegliere $T'=L((1,0,0,0),(0,1,0,0))$. Verificare…

Il vettore **v**=(1,1,1,1) è generato dai quattro vettori che generano $T+U= \mathbb{R}^4$ infatti:

$$(1,1,1,1)=\underbrace{\alpha(0,1,0,0)+\beta(0,0,0,1)}_{\mathbf{t}}+\underbrace{\gamma(1,0,0,3)+\delta(0,0,-1,0)}_{\mathbf{u}}$$

$$\Rightarrow\ \alpha=1,\quad \beta=-2,\quad \gamma=1,\quad \delta=-1\ ,$$

il vettore **t**=1(0,1,0,0)+(-2)(0,0,0,1)=(0,1,0,-2) appartiene a T, mentre il vettore

u=1(1,0,0,3)+(-1)(0,0,-1,0)=(1,0,1,3) appartiene a U.

v = **t** + **u**. Tali vettori sono unici per ...

Esercizio 4 (da svolgere)

Dati V ={(x,y,z,t)| y=0,t +x=0},W={(x,y,z,t)| z=t=x-y=0}:

a) la dimensione e una base per V+W in $\mathbb{R}^4$,

b) la dimensione e una base per $V \cap W$ in $\mathbb{R}^4$,

c) tale somma è diretta?

Traccia

Base di V: ((1,0,0,-1)(0,0,1,0)) $\boxed{\text{dimV=2}}$

Base di W: ((1,1,0,0)) $\boxed{\text{dim W=1}}$

$V \cap W$: $(a,0,b,-a) \in V$ $(x,x,0,0) \in W$

$(a,0,b,-a)=(x,x,0,0) \in V \cap W \Leftrightarrow a=b=x=0$

$$\boxed{\dim V \cap W = 0}$$

$\boxed{\dim (V+W)=2+1-0=3}$ $((1,0,0,-1),(0,0,1,0),(1,1,0,0))$

...

Esercizio 5

Dopo aver studiato i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ L(A) e L(B), determinare una base per $L(A) \cap L(B)$, $L(A)+L(B)$ dove:

$$A = \{(-1,1,0),(0,2,1)\} \quad B = \{(-2,1,3)\ (0,-2,0)\}.$$

Tale somma è diretta?

Svolgimento.

Base di **L(A)**: $((-1,1,0),(0,2,1))$ $\dim L(A)=2$,

$$L(A)=\{(-\alpha,\alpha+2\beta,\beta) \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}.$$

Base di **L(B)**: ((-2,1,3),(0,-2,0)) dimL(B)=2,

$$L(B)= \{(-2\gamma,\gamma-2\delta,3\gamma) \mid \gamma,\delta\in\mathbb{R}\}.$$

$$\mathbf{L(A)\cap L(B):}\quad \underbrace{(-\alpha,\alpha+2\beta,\beta)}_{\in L(A)}=\underbrace{(-2\gamma,\gamma-2\delta,3\gamma)}_{\in L(B)}$$

$\alpha=2\gamma$, $\beta=3\gamma$, $\alpha+2\beta=8\gamma=\gamma-2\delta$ cioè $\delta=-7/2\gamma$

$L(A)\cap L(B)=\{(-2\gamma,8\gamma,3\gamma) \mid \gamma\in\mathbb{R}\}$, che ha base **((..,..,..))**

e dim $L(A)\cap L(B)=1$.

I vettori (-1,1,0),(0,2,1),(-2,1,3),(0,-2,0) generano L(A)+L(B), ma sono lin. dip. (4 vettori di $\mathbb{R}^3$); (……),(…...),(……) sono linearmente indipendenti.

Una base è **((..,..,..),(..,..,),(..,,..))**.

dim(L(A)+L(B))=3. Non è somma diretta.

Esercizio 6

Dato uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ di dimensione 4, una base $(\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3},\mathbf{e_4})$:

a) verificare che $B=(\mathbf{e_1}+2\mathbf{e_2},2\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}+\mathbf{e_4},\mathbf{e_3})$ è una base;

b) determinare le componenti del vettore $\mathbf{w}=\mathbf{e_1}+8\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}+2\mathbf{e_4}$ rispetto a B;

c) determinare un complemento diretto di

$$U=\{2x\mathbf{e_1}+x\mathbf{e_2}+3x\mathbf{e_4}\in V \mid x\in\mathbb{R}\}.$$

Svolgimento.

a) Sfruttando l'ipotesi che $B'=(\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3},\mathbf{e_4})$ è una base (ogni vettore di V è combinazione lineare di $(\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3},\mathbf{e_4})$ e B' è libera) deduciamo che B è libera: $\forall\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$

$\alpha(\mathbf{e_1}+2\mathbf{e_2})+\beta(2\mathbf{e_2})+\gamma(\mathbf{e_3}+\mathbf{e_4})+\delta\mathbf{e_3}=\underline{\mathbf{0}} \Rightarrow \alpha\mathbf{e_1}+(2\alpha+2\beta)\mathbf{e_2}+(\gamma+\delta)\mathbf{e_3}+\gamma\mathbf{e_4}=\underline{\mathbf{0}}$

$\Rightarrow$ $\alpha=2\alpha+2\beta=\gamma+\delta=\gamma=0$ perché $(\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3},\mathbf{e_4})$ è libera cioè $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$. Segue che sono generatori.

B è base.

Oppure

$$\rho\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

dimostra che sono 4 vettori linearmente indipendenti di V (dimV=4) $\Rightarrow$ generatori.

b) Molto utile risulta lavorare con le componenti: **w** ha componenti banali rispetto alla base B′ (1,8,1,2), mentre la base B è costituita da vettori che a loro volta hanno componenti rispetto ai vettori di B′:

(1,2,0,0) (0,2,0,0) (0,0,1,1) (0,0,1,0).

Per trovare le componenti di **w** rispetto ai vettori di B cerco:

$(1,8,1,2)= \alpha(1,2,0,0)+\beta(0,2,0,0)+\gamma(0,0,1,1)+\delta(0,0,1,0)$

$\alpha=1$, $\beta=3$, $\gamma=2$, $\delta=-1$ le componenti sono (.., .., .., ..).

c) Utilizzando le **componenti rispetto a B′**, è facile vedere che una base di U è costituita da un vettore di componenti (2,1,0,3).

Estraendo dalla base B′ tre vettori di componenti ▷**(0,0,1,0)** e (1,0,0,0), (0,1,0,0) si ottiene:

a) ((0,0,1,0),(1,0,0,0),(0,1,0,0),(2,1,0,3)) libera, quindi tali componenti fornirebbero i vettori una base di V .

b) $\boxed{W=\{(a\mathbf{e}_1+b\mathbf{e}_2+c\mathbf{e}_3 \mid a,b,c\in\mathbb{R}\}}$ è un complemento diretto di U perché:

1) W ha per base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, quindi dim W=3;

2) U+W=V (per quanto riportato in a));

3) mentre per il teorema di Grassmann

$\dim W\cap U = -\dim[W+U] + \dim W + \dim U =$

$= -4 + 3 + 1 = 0 \Leftrightarrow W\cap V=\{(0,0,0,0)\}$.

Esercizi da svolgere

1) In uno spazio vettoriale V di dimensione 4 su $\mathbb{R}$, è assegnata una base $B=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4\}$ e due insiemi $A=\{\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\}$, $D=\{\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4\}$; si ricerchi:

a) L(A) , L(D); b) L(A)∩L(D); c) L(A) + L(D);

d) Esiste un s.s.v. W tale che L(A)+W = V ?

2) Trovare la dimensione e una base per V +W in $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$

dove : $V = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y=0 , t - x=0\}$

$W = \{ (x,y,z,t)) \in \mathbb{R}^4 \mid z - t = x -y=0\}$.

3) Dati i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ U e W determinare una base per $U \cap W$, $U+W$:

$$U = \{(0,-a,a+2b,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

$$W = \{(0,-2x,x-2y,3x) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

4) Determinare la dimensione delle coperture lineari generate dai seguenti insiemi e trovare una base di tali sottospazi:

a) $A_1=\{(3,-1,-1),(3,0,-3),(1,-2,3),(5,-1,-3)\}$;

b) $A_2=\{(1,0,1,-1),(1,-1,0,-1),(2,-3,3,-2),(1,0,1,1)\}$.

5) Per quali valori di h, numero reale, la sequenza $A=((h,h,2h+1,h), (h,h,2h,h), (h,0,h-1,h))$ è legata?

6) Determinare per quali valori di k la sequenza A è libera, dove $A=((1,2,2-k,2), (1,1-k,0,k-1), (0,2-k,2-k,0))$.

7) Dati i sottoinsiemi:

$A=\{(1,0,2,3),(0,1,0,1),(1,1,2,4)\}$ e $B=\{(0,0,2,k),(3,2,3,1)\}$

dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, si trovi per quali valori reali di k, $\mathbb{R}^4(\mathbb{R}) = L(A) \oplus L(B)$.