RANGO DI UNA MATRICE ρ(A)

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in K^{m,n}$$

É il massimo ordine di un minore estratto con determinante non nullo.

Equivalentemente è il massimo numero di righe (colonne) linearmente indipendenti.

$A \in \mathbb{K}^{m,n}$	$\rho(A) \leq \min\{m, n\}$

Osservazione 1

Il rango è un invariante tra le matrici ottenute con trasformazioni elementari T1, T2 e T3 che non coinvolgano la moltiplicazione per lo scalare 0. Quindi potremo usare le trasformazioni elementari citate per semplificare la matrice e studiare i minori.

Osservazione 2 (teorema degli orlati)

Una matrice di $\mathbb{K}^{m,n}$ ha rango p se e solo se esiste un minore estratto M di ordine p con determinante non nullo e tutti i minori di ordine p+1 che orlano M hanno il determinante nullo.

Osservazione 3 (teorema di Kronecker)

Dato un insieme finito di vettori C e indicata con A la matrice nelle cui colonne (righe) sono state trascritte le componenti dei vettori rispetto ad una base, ne segue che:

$$\dim L(C) = \rho(A).$$

Dalle colonne (righe) di A che entrano nel minore estratto, con ordine massimo e determinante diverso da 0 (utilizzato per determinare il rango), posso ricavare una base di L(C).

Riportare le componenti dei vettori nelle righe della matrice o nelle colonne per studiare la dimensione della copertura lineare è indifferente.

Esercizio 1

Determinare il rango delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_4(R)$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in R^{3,5}$$

Svolgimento:

I modo (con le trasformazioni elementari)

$$\rho(A) \leq 4$$

$$\rho\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \rho\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

perché il determinante di A è nullo, mentre

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$\rho(B) \leq 3$$

$$\rho\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \rho\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \rho\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

II modo

Per A

- calcolare il determinante di A, scoprendo che era nullo ($\rho(A)<4$);

- determinare un minore di ordine 3 estratto da A con determinante diverso da 0: per esempio $|A_{4,1}|$.
- Concludere $\rho(A)=3$.

Per B

- Trovare, per tentativi, un minore di ordine 3 estratto da B con determinante diverso da 0. Per esempio:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

- Concludere $\rho(B)=3$.

III modo

Per A avrei potuto trovare un minore di ordine 3 con determinante diverso da 0 e controllare che i determinanti di tutte le matrici orlate fossero nulli, in questo caso detA=0.

Esercizio 2

Studiare al variare del parametro reale k il rango di:

$$A=\begin{pmatrix} k+3 & k \\ k+3 & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

Svolgimento:

ρ(A) ≤ 2 perché la matrice è una 3x2.

Estraggo un minore di ordine 2 e calcolo il determinante:

$$\det M = \begin{vmatrix} k+3 & k \\ 0 & k \end{vmatrix} = k(k+3)$$

Se $k \neq 0 \wedge k \neq -3$ il rango è 2.

Per analizzare cosa accade per k=0 o k=-3 sostituisco in A tali valori con la possibilità, eventualmente, di cambiare minore rispetto a M.

- Se k=0

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \rho(A)=\ldots$$

- Se k= - 3

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \rho(A)=\dots$$

Concludo:

Se k≠ - 3 il rango è …

Se k= - 3 il rango è ….

Esercizio 3

Studiare al variare del parametro reale h il rango di:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & h & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in R^{3,4}$$

$$\rho(A)\leq 3.$$

Osservo che la prima riga e la terza coincidono dunque il numero delle righe linearmente indipendenti è al massimo 2. Estraggo un minore * di ordine 2 con determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$, diverso da 0 per ogni valore di h.

ρ(A)=2 per ogni valore di h reale.

Oppure orlo il minore * con le due possibili matrici ottenute da A e controllo che i determinanti siano nulli.

Esercizio 4

Studiare al variare del parametro reale h il rango di:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2+h & 3 \\ 0 & 3 & h & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in R^{3,4}$$

Osservo che **(IV colonna) = 3x (I colonna)+ (II colonna).**

Pongo l'attenzione sulle prime tre colonne:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2+h \\ 0 & 3 & h \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3(2-2-h) = -3h$$

Se h≠0 il rango è 3. Se h=0, sostituendo nella matrice tale valore

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Si conclude che (es.3) il rango è 2. Riassunto:

Se $h \neq 0$ il rango è ….
Se $h = 0$ il rango è ….

Esercizio 5

Determinare la dimensione delle coperture lineari generate dai seguenti insiemi e trovare una base di tali sottospazi:

a) $A_1 = \{(1,0,-1),(2,-1,0),(-3,0,3),(-1,2,-3)\} \subseteq \mathbb{R}^3$;

b) $A_2 = \{(1,-2,3,-1),(1,0,-1,-1),(1,0,1,-1),(-1,1,0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$;

c) $A_3 = \{(0,1,0),(1,-2,3),(1,0,-1),(1,0,1),(1,1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$;

d) $A_4 = \{(0,1,-2,1),(1,0,2,4),(2,2,0,4),(1,0,2,3)\} \subseteq \mathbb{R}^4$;

Svolgimento:

a) in virtù del teorema di Kronecker, dim $L(A_1)$ è pari al rango della matrice costruita mettendo nelle colonne (righe) le componenti dei vettori di A_1 rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$:

$$\rho\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \leq 3$$

La (IIIC)=-3(IC). Togliendo la terza colonna si ottiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

La I e la II colonna sono linearmente indipendenti perché $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. Il rango è quindi 2.

dim L(A_1)=2 e una base estratta è ((1,0,-1),(2,-1,0)).

b) La dim L(A_2)=rango della matrice

$$\rho\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \leq 4$$

Noto che la (IR)=-(IVR) e concludo che il rango non è 4. Trovo un minore di ordine 3 con determinante diverso da 0, per esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Concludo che il rango è 3.

dim $L(A_2)$=3 e

una base è ((1,0,-1,-1) , (1,0,1,-1) , (-1,1,0,1)).

…

dim $L(A_3)$=3 e una base è la base canonica.

dim $L(A_4)$=3 e

una base è ((0,1,-2,1), (1,0,2,4), (1,0,2,3)).

Esercizio 6

Con riferimento all'esercizio 5, per quali valori del parametro reale k:

a) il vettore v=(1, k-1,k) appartiene a $L(A_1)$;

b) il vettore u=(1, k,0,k) appartiene a $L(A_2)$;

c) il vettore w=(k,0,-k) appartiene a $L(A_3)$;

d) il vettore t=(1, k,0,k) appartiene a $L(A_4)$.

Svolgimento:

a) nell'esercizio precedente abbiamo determinato dimensione e base di $L(A_1)$ e ora osserviamo che $v \in L(A_1) \Leftrightarrow L(A_1 \cup \{v\}) = L(A_1)$

se e solo se v è combinazione lineare dei due vettori della base ((1,0,-1),(2,-1,0)),

se e solo se

$$\rho\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ k-1 & 0 & -1 \\ k & -1 & 0 \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Se e solo se

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ k-1 & 0 & -1 \\ k & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3k+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{1}{3}.$$

b) il vettore u=(1,k,0,k) appartiene a $L(A_2)$ $\Leftrightarrow$

$L(A_2 \cup \{u\}) = L(A_2) \Leftrightarrow \dim L(A_2 \cup \{u\}) = \dim L(A_2) \Leftrightarrow$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ k & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ k & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ k & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ k & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ k & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ k & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -1(-1)^{3+2} \cdot$$

$$\cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ k & 0 & 1 \\ k & -2 & 1 \end{pmatrix} = 2k + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = -1$$

c)… per ogni k.

d)… per k=1.

Esercizio 7

Studiare al variare del parametro reale a la dimensione dello spazio vettoriale generato dai vettori (h+3,h), (h+3,4) e (0,h) di $\mathbb{R}^2$.

Svolgimento:

Mettendo le componenti dei vettori rispetto alla base canonica in colonna ottengo

$$\begin{pmatrix} h+3 & h+3 & 0 \\ h & 4 & h \end{pmatrix}$$

che è la matrice trasposta della matrice A dell'esercizio 2 con h=k. Traducendo i risultati ottenuti in tale esercizio, concludo che per quanto riguarda la dimensione della copertura lineare:

se h≠ … la dimensione è ...
Base canonica B=(…………) di $\mathbb{R}^2$.
se h= … la dimensione è ... Base B=(……).