Una **<u>sequenza</u>** di vettori **($v_1,\ldots,v_n$)** **generatori** di $V(\mathbb{K})$ **libera** si dice **base** di $V(\mathbb{K})$.

Nell'ultimo esercizio della lezione 5 le sequenze A, B costituiscono una base per le rispettive coperture lineari.

Basi di uno spazio vettoriale

Gli spazi vettoriali presi in considerazione in questo corso di Algebra e Geometria sono **finitamente generati**.

Uno spazio vettoriale V, $V \neq \{\underline{0}\}$ su $\mathbb{K}$ ha **dimensione n** se e solo se le **sue basi hanno n vettori**.

Uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$ di dimensione n ha:

- ♦ sottospazi vettoriali di dimensione da 1 a n;
- ♦ il sottospazio vettoriale banale contenente solo il vettore nullo che non ha base.

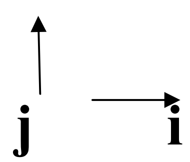
Esempi:

1) Lo spazio vettoriale delle potenze di $\mathbb{R}$, $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ha dimensione n.

   Una base è...

2) Lo spazio vettoriale geometrico $(V_2\,(\mathbb{R}), +, \cdot)$ sul piano ha dimensione 2.

   Una base è …



3) Lo spazio vettoriale delle matrici $(\mathbb{R}^{m,n}, +, \cdot)$ ha dimensione mn.

Una base:

$$\left(\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&&\\&&\ddots&\\0&&&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&\cdots&0\\0&0&&\\&&\ddots&\\0&&&0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0&0&\cdots&1\\0&0&&\\&&\ddots&\\0&&&0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\0&0&&\\&&\ddots&\\1&&&0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\0&0&&\\&&\ddots&\\0&&&1\end{pmatrix}\right)$$

Nei due esercizi successivi studieremo come determinare le basi:

a) di un sottospazio vettoriale assegnato;

b) della copertura lineare di un insieme A.

Esercizio 1

Dati i seguenti sottospazi vettoriali, determina una base e la dimensione per ciascuno:

a) $U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=0 \wedge y + 3z = 0\}$;

b) $U_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3t=0 \wedge x - 3z = 0\}$;

c) $U_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y=0 \wedge x + 2z = 0\}$;

d) $$U_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \\ u & v \end{pmatrix} \; x,y,z,t,u,v \in \mathrm{R} \,\middle|\, x = v = 0 \wedge y - t = 0 \right\};$$

e) $U_5 = \{(\alpha,\beta,2\alpha,0) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Svolgimento:

a) Gli elementi di U_1 sono tutti e soli i vettori del tipo $(0, -3z, z)$ con $z \in \mathbb{R}$:

$$(0, -3z, z) = z\,(0,-3,1)$$

Allora $\{(0,-3,1)\}$ è un insieme di generatori per U_1.

Il vettore $(0,-3,1)$ è linearmente indipendente…

Dunque **((0,-3,1))** è una base per U_1.

La dimensione di U_1 è quindi 1: **dim U_1=1**.

b) Gli elementi di U_2 sono tutti e soli i vettori del tipo $(3z, y, z,0)$ con $y,z \in \mathbb{R}$.

$$(3z, y, z,0)=y(0,1,0,0)+z(3,0,1,0)$$

Allora $\{(0,1,0,0),(3,0,1,0)\}$ è un insieme di generatori.

I vettori generatori sono linearmente indipendenti infatti $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ $\alpha(0,1,0,0)+\beta(3,0,1,0)=(0,0,0,0)$

$$\Rightarrow \alpha=\beta=0.$$

((0,1,0,0),(-2,0,1,0)) è una base per U_2.

La dimensione di U_2 è quindi 2: **dim U_2=2**.

c) Gli elementi di U_3 sono tutti e soli i vettori di $\mathbb{R}^4$ (x,y,z,t) le cui entrate soddisfano il sistema:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$ cioè x=-2z e y=2z

$$U_3 = \{(-2z,2z,z,t) \in \mathbb{R}^4\}.$$

I vettori (-2z,2z,z,t)=z(-2,2,1,0)+t(0,0,0,1) sono generati da (-2,2,1,0),(0,0,0,1). Questi vettori sono linearmente indipendenti, infatti:

$\alpha(-2,2,1,0)+\beta(0,0,0,1)=(0,0,0,0)$ con $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

implica $(-2\alpha,2\alpha,\alpha,\beta)=(0,0,0,0)$ e infine $\alpha=\beta=0$.

((-2,2,1,0),(0,0,0,1)) è una base per U_3: **dim U_3=2**.

d) Tutte e sole le matrici di U_4 sono del tipo:

$$\begin{pmatrix} 0 & y \\ z & y \\ u & 0 \end{pmatrix} \quad y,z,u \in R$$

$$\begin{pmatrix} 0 & y \\ z & y \\ u & 0 \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad y,z,u \in R$$

Allora l'insieme:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

fornisce un insieme di generatori per U_4.

Questo insieme è libero, infatti:

$$\alpha\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Allora $\boxed{\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)}$ è una base per U_4.

La **dimensione di U_4 è 3**.

e) I vettori di U_5 sono del tipo $(\alpha,\beta,2\alpha,0)\in \mathbb{R}^4$:

$$(\alpha,\beta,2\alpha,0)=\alpha(1,0,2,0)+\beta(0,1,0,0) \text{ con } \alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$$

La sequenza dei generatori estratta ((1,0,2,0), (0,1,0,0)) è …..:

$\alpha(1,0,2,0)+\beta(0,1,0,0)=(0,0,0,0)$ implica …..

((1,0,2,0), (0,1,0,0)) è …….. e U_5 ha **dimensione …..**.

Esercizio 2

Dati i seguenti insiemi, determinare la copertura lineare, una base e la dimensione della stessa.

a) $A_1 = \{(1,2,0)\ ,(1,0,1), (0,-2,1)\}$;

b) $$A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y-1 \\ z & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \ \mathrm{y,z,v} \in \mathrm{R} \right\};$$

c) $A_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 1 \wedge x + 2z = 0\}$.

Osservazione: A_1 ha un numero finito di vettori.

A_1, A_2 hanno un numero infinito di vettori.

a) I tre vettori di A_1 sono, per definizione, generatori di $L(A_1)$.

Controlliamo che siano linearmente indipendenti:

$\alpha(1,2,0)+\beta(1,0,1)+\gamma(0,-2,1) =(0,0,0)$

implica solo $\alpha = - \beta = \gamma$ (non necessariamente nulli)

I vettori sono linearmente dipendenti: è facile vedere che $(0,-2,1) = (1,0,1) - (1,2,0)$ è combinazione lineare degli altri due vettori di A_1.

I vettori (1,2,0) e (1,0,1) sono generatori della copertura lineare e sono linearmente indipendenti:

$$\alpha(1,2,0) + \beta (1,0,1) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

((1,2,0) , (1,0,1)) è una base per $L(A_1)$.

La dimensione di $L(A_1)$ è 2.

b) Se y è un numero reale generico, allora anche y-1=a lo è (ogni y-1 è un opportuno numero a, ogni numero reale a può essere scritto come (a+1)-1=y-1con y numero reale):

$$L(A_2)=\left\{\begin{pmatrix}0 & a\\ z & 0\\ 0 & v\end{pmatrix}\ a,z,v\in R\right\}$$

I generatori estratti elementarmente sono:

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

e sono linearmente indipendenti. Infatti:

$$\alpha\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\alpha=\beta=\gamma=0$$

La sequenza

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)}$$

è una base di $L(A_2)$. La **dimensione di $L(A_2)$=3**.

c) $A_3 = \{(-2z,1,z) \mid z\in \mathbb{R}\}$.

I vettori di A_3 $(-2z,1,z)=z(-2,0,1)+(0,1,0)$ sono generati da **particolari combinazioni lineari** (non tutte) di $((-2,0,1),(0,1,0))$: la copertura lin. di A_3 sarà quindi costituita, per definizione, da tutti i vettori del tipo $\alpha(-2,0,1)+\beta(0,1,0)=(-2\alpha,\beta,\alpha)$ $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$

$$L(A_3)= \{(-2\alpha,\beta,\alpha) \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$$

((…,…,…),(…,…,…)) sono generatori di $L(A_3)$;
sono anche linearmente indipendenti perchè

$\alpha(-2,0,1)+\beta(0,1,0)=(-2\alpha,\beta,\alpha)=(0,0,0) \Rightarrow$……….

((…,…,…),(…,…,…)) è una base di $L(A_3)$; **dim $L(A_3)$=….**

Esercizio 3

Trovare le componenti dei vettori indicati rispetto alle basi prescelte:

a) v=(7,10,4), w=(5,5,-1)$\in\mathbb{R}^3$ e

B=((1,2,0),(1,0,1),(0,0,2)) base di $\mathbb{R}^3$;

b) (2,-3,0,4) $\in\mathbb{R}^4$ e

B=((1,1,0,0),(1,0,1,1),(0,0,2,0),(0,0,0,1)) base di $\mathbb{R}^4$;

c)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(R) \text{ e}$$

$$B = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{base di} \quad M_2(R).$$

Svolgimento:

a) dobbiamo trovare α, β, $\gamma\in\mathbb{R}$ tali che

$$\alpha(1,2,0) + \beta\,(1,0,1) + \gamma(0,0,2) = (7,10,4)$$

$\Rightarrow$ α=5 , β=2 , γ=1 $\Rightarrow$ **componenti** $\boxed{(5,2,1)}$

$$\alpha(1,2,0) + \beta\,(1,0,1) + \gamma(0,0,2) = (5,5,-1)$$

$$\Rightarrow \alpha=5/2,\ \beta=5/2,\ \gamma=-7/4 \Rightarrow \textbf{componenti}$$

$$\boxed{(5/2,5/2,-7/4)}$$

b) dobbiamo trovare $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tali che

$$(2,-3,0,4)=\alpha(1,1,0,0)+\beta(1,0,1,1)+\gamma(0,0,2,0)+\delta(0,0,0,1)$$

$\Rightarrow$ α=… , β=… , γ=…, δ=…

$\Rightarrow$ **componenti** $\boxed{(\ldots,\ldots,\ldots,\ldots)}$

c) dobbiamo trovare $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ α=.., β=.., γ=.., δ=.. $\Rightarrow$ **componenti** $\boxed{(..,..,..,..)}$

Esercizio 4

Dato l'insieme S di $M_2(\mathbb{R})$

$$S = \left(\begin{pmatrix} 2x & 1 \\ z & -x \end{pmatrix} \quad \middle| \quad x, z \in R \right)$$

a) determinare L(S), una base e dimensione;

b) verificare che la matrice

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

appartenga a L(S) e in caso affermativo se ne calcolino le componenti rispetto alla base scelta al punto a).

S ha per elementi:

$$\begin{pmatrix} 2x & 1 \\ z & -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ **(particolari combinazioni lineari)**

Invece L(S) contiene **tutte** le combinazioni lineari delle tre matrici qui sopra isolate.

Tali matrici sono anche linearmente indipendenti:

$$x\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{x = y = z = ...}$$

$$L(S) = \left(\begin{pmatrix} 2x & y \\ z & -x \end{pmatrix} \quad | \quad x, y, z \in R \right)$$

dim L(S)=…,

$$B=\left(\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right).$$

$$x\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{x}=-2, \mathrm{y}=3, \mathrm{z}=1$$

La matrice appartiene a L(S) e le componenti rispetto a questa base di L(S) sono: **(…,…,…).**

Esercizio 5

In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri il sottospazio vettoriale

W={(2x,0,2x,y) $\in$ $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ | x,y$\in\mathbb{R}$ }

a) determinare una base e la dimensione di W;

b) dimostrare che ((1,0,1,1),(-1,0,-1,0)) costituisce una base per W;

c) determinare le componenti del vettore (4,0,4,4) rispetto ad entrambe le basi.

Traccia della soluzione

a) $(2x,0,2x,y)=x(2,0,2,0)+y(0,0,0,1) \in \mathbb{R}^4(\mathbb{R})$

$((2,0,2,0),(0,0,0,1))$ sono ………. di W

Sono linearmente indipendenti: verifica…

Base di W ((2,0,2,0),(0,0,0,1)) e dimW=…..

b) $((1,0,1,1),(-1,0,-1,0))$ è base di W perché:

b_1) i due vettori sono linearmente indipendenti

$\alpha(1,0,1,1)+\beta(-1,0,-1,0)=(0,0,0,0)\Rightarrow$………..;

b_2) $L(((1,0,1,1),(-1,0,-1,0))=W$:

- ♦ $L((1,0,1,1),(-1,0,-1,0))\subseteq W$ perché…
- ♦ $W\subseteq L(((1,0,1,1),(-1,0,-1,0))$ perché ogni vettore di W è combinazione di $(1,0,1,1),(-1,0,-1,0)$:

$(2x,0,2x,y)=\ldots(1,0,1,1)\ldots\ldots(-1,0,-1,0)$.

c) $(4,0,4,4)=\ldots(2,0,2,0)+\ldots(0,0,0,1)\Rightarrow$componenti **(**…,…**)**

$(4,0,4,4)=\ldots(1,0,1,1)+\ldots(-1,0,-1,0)\Rightarrow$componenti **(**…,…**)**

Esercizio da svolgere

Determinare una base e la dimensione delle coperture lineari dei seguenti insiemi:

a) $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x = 1\}$;

b) $A_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y = 0\}$;

c) $$A_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq R^{2,3};$$

d) $A_4 = \{(\alpha, \alpha, \beta, \alpha) \in R^4 \mid \alpha , \beta \in \mathbb{R} \}$;

e) $A_5 = \{(x, y,z, t) \in R^4 \mid x+3y=2z-t=0 \}$;

f) $A_6 = \{(0, 1, 0, \alpha) \in R^4 \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$;

g) $A_7 = \{(1,0,1,0),(3,2,4,0),(0,1,0,0),(3,2,3,0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$;

g) $A_8 =\{(1,0,1,0), (3,2,3,0),(0,1,0,0),(1,2,1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

(dim $L(A_i)=2$ con $i=1,2,3,4,5,6,8$ dim $L(A_7)=3$).