Terminiamo gli ultimi due esercizi della lezione 4 …

# SPAZI E SOTTOSPAZI VETTORIALI

Dato un campo $\mathbb{K}$ e (V,+) gruppo abeliano, se è definita la legge di composizione tra gli scalari $\lambda$ di $\mathbb{K}$ e gli elementi **v** di V tale che $\lambda$**v** appartenga a V e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e per ogni v, w $\in$ V valgono:

1) $(\lambda+\mu)\cdot\mathbf{v}=\lambda\cdot\mathbf{v}+\mu\cdot\mathbf{v}$ ;
2) $\lambda\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\lambda\cdot\mathbf{v}+\lambda\cdot\mathbf{w}$ ;
3) $(\lambda\,\mu)\cdot\mathbf{v}=\lambda\,(\mu\cdot\mathbf{v})$;
4) $1\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}$ .

allora V è detto **spazio vettoriale** e i suoi elementi detti **vettori**.

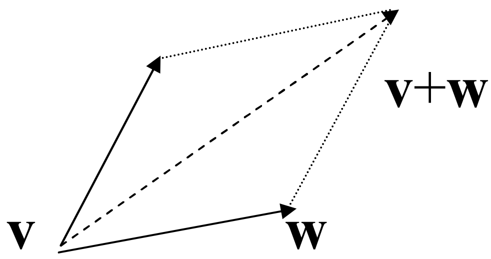
# Esempi

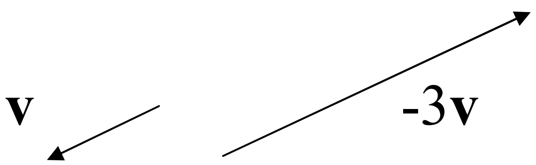
1) Lo spazio vettoriale delle potenze di $\mathbb{R}$: $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$:

$(x_1, \ldots, x_n)+(y_1, \ldots, y_n)=(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)$

$\lambda(x_1, \ldots, x_n)=(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$

2) lo spazio vettoriale geometrico $(V_2, +, \cdot)$ sul piano in $\mathbb{R}$:




3) lo spazio vettoriale delle matrici $(\mathbb{R}^{m,n}, +, \cdot)$:

$A+B=(a_{i,j})_{i\in I, j\in J} + (b_{i,j})_{i\in I, j\in J} = (a_{i,j}+b_{i,j})_{i\in I, j\in J}$

$\lambda A=\lambda(a_{i,j})_{i\in I, j\in J}=(\lambda a_{i,j})_{i\in I, j\in J}$, $I=\{1,\ldots,m\}$, $J=\{1,\ldots,n\}$

# Sottospazi di uno spazio vettoriale

Per la definizione si veda la IV lezione di teoria di giovedì 1 ottobre 2009.

1) Condizione necessaria e sufficiente affinché un insieme $U \neq \emptyset$, sottoinsieme di uno spazio vettoriale $(V(\mathbb{K}), +, \cdot)$, sia **sottospazio vettoriale** di $V(\mathbb{K})$:

a) $\forall\, u_1, u_2 \in U \quad \Rightarrow \quad u_1 + u_2 \in U$

b) $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, u \in U \quad \Rightarrow \quad \lambda u \in U$

2) Condizione necessaria e sufficiente affinché un insieme $U \neq \emptyset$, sottoinsieme di uno spazio vettoriale $(V(\mathbb{K}), +, \cdot)$, sia **sottospazio vettoriale** di $V(\mathbb{K})$:

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall\, \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \in U \quad \Rightarrow \quad \alpha \mathbf{u_1} + \beta \mathbf{u_2} \in U$$

## Esercizio 1

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ su $\mathbb{R}$ individuare quali dei seguenti insiemi sono sottospazi vettoriali:

$U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + 5z = 0\}$;

$U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2= -1\}$;

$U_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2= 0\}$;

$U_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -3\}$;

$U_5 = \{(1,2,1), (2,3,-1), (0,0,0)\}$.

Verifica:

1) $U_1$ è diverso dall'insieme vuoto perché contiene il vettore (0,0,0). Utilizzando il criterio 2 verifichiamo che:

$\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall \mathbf{u_1}=(x_1,y_1, z_1), \mathbf{u_2}=(x_2,y_2,z_2) \in U_1$

$$\alpha \mathbf{u_1} + \beta \mathbf{u_2} \in U_1$$

Osserviamo che un vettore (x,y,z) di $\mathbb{R}^3$ appartiene a $U_1$ se e solo se le sue componenti soddisfano la proprietà caratteristica $y + 5z = 0$, dunque sicuramente per le ipotesi fatte $y_1 + 5 z_1 = 0$ (1) e $y_2 + 5 z_2 = 0$ (2).

$$\alpha \mathbf{u_1}+\beta \mathbf{u_2} = \alpha(x_1,y_1,z_1)+\beta(x_2,y_2,z_2) =^{\text{def. di prodotto per uno scalare}}$$

$$= (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)+ (\beta x_2, \beta y_2, \beta z_2) =^{\text{def. di somma in } \mathbb{R}3}$$

$$=(\alpha x_1+\beta x_2 , \alpha y_1+\beta y_2 , \alpha z_1+ \beta z_1)=(x,y,z)$$

$\alpha \mathbf{u_1}+\beta \mathbf{u_2}$ appartiene a $U_1$ se e solo se $y+5z=0$, cioè

$$(\alpha y_1+\beta y_2) +5(\alpha z_1+\beta z_2)=0$$

infatti in $\mathbb{R}$: $(\alpha y_1+\beta y_2) +5(\alpha z_1+\beta z_2)=$

$= \alpha y_1+\beta y_2 + 5\alpha z_1+5\beta z_2= \alpha( y_1 + 5 z_1) +\beta (y_2 + 5 z_2)=$

$= \alpha 0 + \beta 0=0$ per le uguaglianze (1) e (2). $U_1$ è un sottospazio vettoriale.

2) $U_2$ non è sottospazio vettoriale: $(0,0,0)\notin U_2$.

3) $U_3= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{x^2+y^2}_{\geq 0} = \underbrace{- z^2}_{\leq 0}\}=\{(0,0,0)\}$ $\Rightarrow x=y=z=0$

è sottospazio vettoriale banalmente.

4) $U_4$ non è sottospazio vettoriale perché il vettore nullo (0,0,0) di $\mathbb{R}^3$ non appartiene a $U_4=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=-3\}$;

5) $U_5$ non è sottospazio vettoriale perché, pur contenendo il vettore nullo, non è chiuso rispetto alla somma:

$$(1,2,1) + (2,3,-1)=(3,5,0)\notin U_5.$$

## Esercizio 2

Nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ verificare quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali:

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\};$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid x,y,z,t \in R \wedge x = z = t = 0 \right\};$$

$$W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid x,y,z,t \in R \wedge x = -1 \right\}$$

Verifica:

1) $W_1$ , pur contenendo la matrice nulla di $M_2(\mathbb{R})$, non è chiuso rispetto alla somma (**non è s.s.v**.):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \notin W_1 .$$

2) Gli elementi di $W_2$ sono tutti e soli del tipo:

$$\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ con } y \in R.$$

$W_2$ è ovviamente diverso dall'insieme vuoto perché ponendo y=0 verifichiamo che la matrice nulla appartiene a $W_2$. Utilizzando il secondo criterio verifichiamo che sia sottospazio vettoriale:

$$\forall\ \alpha,\beta \in R \quad e \qquad \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W_2 \text{ con } y,u \in R$$

dimostriamo che

$$\alpha\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W_2$$

infatti

$$\alpha\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \beta u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha y + \beta u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W_2$$

$W_2$ **è sottospazio vettoriale**.

3) $W_3$ non può contenere la matrice nulla ($x = -1$):

**non è un sottospazio vettoriale**.

## Copertura lineare di A in $V(\mathbb{K})$

Sia $A \subseteq V(\mathbb{K})$, $A \neq \emptyset$, si definisce copertura lineare $L(A)$ il seguente insieme

$$L(A) = \left\{ v \in V \;\middle|\; v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \quad \forall\, \alpha_i \in K,\ v_i \in A \right\}$$

I vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ si dicono **generatori** di $L(A)$.

Il vettore v si dice **combinazione lineare** di $\mathbf{v_1, \ldots v_n}$.

## Esercizio 3

Verificare che l'elemento v appartenga alla copertura lineare di A in V:

a) $V = \mathbb{R}^4$ $A = \{(0,1,0,-3), (0,2,2,-1), (0,0,-1,0)\}$

$v = (0,3,1,-4)$ ;

b) $V = R^{2,3}$ $\quad A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$v = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Verifica:

a) v=(0,3,1,-4) appartiene alla L(A) se e solo se esistono tre scalari $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ opportuni tali che:

v=(0,3,1,-4)= $\alpha$(0,1,0,-3)+$\beta$(0,2,2,-1)+ $\gamma$(0,0,-1,0).

Risolvendo i calcoli …

$\alpha$=1, $\beta$=1, $\gamma$=1. Dunque $v \in L(A)$.

b) $v = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ appartiene a L(A) se e solo se

esistono due scalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ opportuni tali che:

$$\alpha\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdots$$

Non esistono $\alpha$, $\beta$ con tali caratteristiche. Quindi $v \notin L(A)$.

## Esercizio 4

Verificare che A sia un insieme di generatori di V nei seguenti casi:

a) $V= \{(\alpha,\alpha,\beta) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$

$A= \{(1,-1,0), (0,0,-1), (1,1,3)\}$;

b) $V=\left\{\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & x\end{pmatrix} \mid x, y \in R\right\} A=\left\{\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & -3\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$;

c) $V = R^{3,2}$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

d) V del punto a) e D={(1,1,0),(0,0,-1), (1,1,3)}.

Verifica:

a) Ogni vettore di V può essere scritto con $(\alpha,\alpha,\beta)$ dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ opportuni.

Dimostro che V è contenuto in L(A).

Ogni vettore di V può essere scritto come combinazione lineare di (1,-1,0), (0,0,-1), (1,1,3);

Dimostriamo che esistono tre scalari $x,y,z \in \mathbb{R}$ tali che

$$x(1,-1,0)+y(0,0,-1)+z(1,1,3)=(\alpha,\alpha,\beta).$$

…. $x=0,\ y=3\alpha-\beta\ ,\ z=\alpha.$

D’altra parte L(A) non è contenuto in V perché

(1,-1,0) non appartiene a V.

A non è un insieme di generatori per V.

d) Diverso è il caso di $V=\{(\alpha,\alpha,\beta)\mid \alpha,\ \beta\in \mathbb{R}\}$

$D=\{(1,1,0),(0,0,-1),(1,1,3)\}$:

Primo $V\subseteq L(D)$:

$$(\alpha,\alpha,\beta)=0(1,1,0)+(3\alpha-\beta)(0,0,-1)+\alpha(1,1,3)\ \dots$$

Secondo $L(D)\subseteq V$ perché $D\subseteq V$

$$L(D)=V\ .$$

b) Ogni $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$ $x,y\in \mathbb{R}$ è combinazione lineare di

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, infatti esistono $\alpha$, $\beta$ reali tali che

$$\alpha\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = x/2, \quad \beta = -y/3.$$

$V \subseteq L(A)$.

$L(A) \subseteq V$ perché $A \subseteq V$.

A fornisce un insieme di generatori per V.

b) Ogni matrice di $\mathbb{R}^{3,2}$ di entrate x, y, z, t, u, $v \in \mathbb{R}$

è combinazione di

$$\alpha\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\varepsilon\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \\ u & v \end{pmatrix}$$

$\alpha$=v-t/2, $\beta$=x/2, $\gamma$=-y, $\delta$=-z, $\varepsilon$=u/3, $\varphi$=t/2….

A fornisce un insieme di generatori per V.

## Esercizio 5

Trovare un insieme di generatori per i seguenti spazi vettoriali su $\mathbb{R}$:

a) $\mathbb{R}^4$;

b) $V=\{(\alpha,\alpha,0,\beta) \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$;

c) $V=\{(\alpha,\beta,\gamma,\gamma) \mid \alpha,\beta,\gamma \in\mathbb{R}\}$;

d) $\mathbb{R}^{2,4}$.

Ricerca:

a) $\{(0,1,0,0),(1,0,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ infatti…

b) $\{(1,1,0,0),(0,0,0,1)\}$ infatti…

c) $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,1)\}$ infatti…

d) $$\left(\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\right.$$
$$\left.\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&2&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right)$$

## Esercizio 6

I vettori (1,2,0), (1,-2,0),(1,0,1) sono generatori di $\mathbb{R}^3$?

Sì, perché ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ (x,y,z) può essere espresso come loro combinazione lineare:

dobbiamo dimostrare che esistono $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ $\in\mathbb{R}$ opportuni tali che $(x,y,z)=\alpha(1,2,0)+\beta(1,-2,0)+\gamma(1,0,1)$

$\Rightarrow$ $\alpha=1/2x+1/4y-1/2z$ , $\beta=1/2x-1/4y-1/2z$ , $\gamma=z$.

… **L{(1,2,0), (1,-2,0),(1,0,1)}=** $\mathbb{R}^3$

Una sequenza di vettori ($\mathbf{v_1},\ldots,\mathbf{v_n}$) di $V(\mathbb{K})$ si dice **libera** e i vettori $\mathbf{v_1},\ldots,\mathbf{v_n}$ si dicono **linearmente indipendenti** se la loro generica combinazione lineare posta uguale al vettore nullo $\forall\alpha_1\ldots\alpha_n\in\mathbb{K}$

$\alpha_1\mathbf{v_1}+\ldots+\alpha_n\mathbf{v_n}=\underline{\mathbf{0}}$ implica $\alpha_1=\ldots=\alpha_n=0$

## Esercizio 7

Quali delle seguenti sequenze sono libere in V?

a) $V=\mathbb{R}^5$ $A=((0,1,2,0,0), (0,1,-2,0,0), (0,1,0,1,0))$;

b) $V = R^{3,2}$

$$B = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

c) $V=\mathbb{R}^3$ $C=((1,1,0), (0,0,-3), (0,0,1))$;

Prova:

a) $\alpha(0,1,2,0,0)+\beta(0,1,-2,0,0)+\gamma(0,1,0,1,0)=$

$=(0,\alpha+\beta+\gamma,2\alpha-2\beta,\gamma,0)=(0,0,0,0,0) \Rightarrow \quad \alpha=\beta=\gamma=0.$

La sequenza è libera.

b) La sequenza è libera:

$$\alpha\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\varepsilon\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 3 & 0\end{pmatrix}+\varphi\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\beta & -\gamma\\ -\delta & 2\varphi\\ 3\varepsilon & \alpha+\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

implica tutti gli scalari nulli $\alpha=\beta=\gamma=\delta=\varepsilon=\varphi=0$.

c) $\alpha(1,1,0)+\beta(0,0,-3)+\gamma(0,0,1)=(0,0,0) \quad \ldots\Rightarrow \quad \alpha=0$, $\gamma=3\beta$ non necessariamente nulli. La sequenza è legata.

## Esercizi da svolgere

1. Da **algebra lineare 1** es. ….

2. Quali tra i seguenti insiemi sono sottospazi vettoriali di V (motivare nel caso la risposta con opportuna dimostrazione):

   a) $V = R^4$ $W=\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in V \mid x_1-3x_3=0,\ x_4-x_2=0\}$

   b) $V=M_3(\mathbb{R})$ $W=\{(a_{i,j})\in V \mid i < j\ ,\ a_{i,j}=0\}$.

3. Mostrare che la copertura in V dell'insieme A è W:

   a) $V = R^4$ $A=\{(1,0,-1,0),(0,2,3,0),(1,1,0,0)\}$

   $W=\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in V \mid x_4=0\}$

   b) $V = R^4$ $A=\{(1,0,-1,0),(3,0,-3,0),(0,1,0,0)\}$

   $W=\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in V \mid x_1 + x_3=0,\ x_4=0\}$

   c) $V = M_2(R)$ $W = M_2(R)$

   $$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

4. Nell'esercizio 3 trovare altri due insiemi di generatori oltre ad A per il s.s.v. W.

5. Quali tra gli insiemi A dell'esercizio 3 sono liberi?