Trasformazioni elementari sulle matrici

Data una matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ definiamo su A le seguenti tre trasformazioni elementari:

$\mathbf{T_1}$: scambiare tra loro due righe (o due colonne) di A;

$\mathbf{T_2}$: sommare ad una riga (o colonna) di A il prodotto di un'altra riga (o colonna) di A per uno scalare;

$\mathbf{T_3}$: moltiplicare una riga (o colonna) di A per uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$.

Proprietà del determinante di una matrice

Data una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, sia $B \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice ottenuta da A mediante trasformazioni elementari:

1) Se B è stata ottenuta da A mediante una trasformazione $\mathbf{T_1}$ allora **det B= - det A**;
2) Se B è stata ottenuta da A mediante una trasformazione $\mathbf{T_2}$ allora **det B= det A**;

3) **Se B** è stata ottenuta da A mediante una trasformazione $\mathbf{T_3}$ allora **det B=** λ **det A**;

I teoremi precedenti sono utili per semplificare i conti nello sviluppo del determinante i quanto permettono di creare un numero maggiore di zeri nelle righe/colonne delle matrici.

Esercizio 1

Calcolare il determinante di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 6 \\ 4 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in M_4(R)$$

Sfrutto le trasformazioni elementari per ridurre la matrice, se possibile, in una matrice triangolare superiore (o inferiore):

$$\det A \underset{T2}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 4 & 17 & -22 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \underset{T2}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 & 6 \\ 0 & -13 & 17 & -22 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} =$$

$= 1\cdot(-13)\cdot(-2)\cdot(-3) = - 78$

Esercizio 2

Calcolare il determinante di

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_5(R)$$

$$\det B \underset{T_3}{=} 2\det\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{T_2}{=} 2\det\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= 2\cdot(1)\cdot(-1)^{4+1}\det\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \underset{T_2}{=} -2\det\begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 & 2 \\ 1 & 4 & 11 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= -2\cdot(1)\cdot(-1)^{3+4}\det\begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & 11 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{T_2}{=} 2\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -7 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{T_3}{=}$$

$$= 2\cdot 7\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 14\cdot 1\cdot(-1)^{3+2}\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\ 14\cdot(2+7) = -\ 126$$

Esercizi da svolgere

Determinare il determinante delle seguenti matrici possibilmente con l'uso delle trasformazioni elementari:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 8 \\ \frac{1}{8} & -2 & 9 & -4 \\ 2 & 0 & -21 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 9 & 1 \\ 4 & 4 & 12 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -21 & -3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 1 & -1 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 6/5 & 6 & 21 & 0 & 2/3 \\ 21 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 21 & 4 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

[risultati: detA=-25, detB=0, detC=-90, detD=-44, detE=0]

L’uso delle trasformazioni elementari si rende praticamente indispensabile per il calcolo dei determinanti parametrici.

Esercizio 3

Determinare per quali valori del parametro reale k$\in\mathbb{R}$ il determinante della seguente matrice è **non nullo**.

$$B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & k+3 \\ k & -k & 0 \\ k & -1 & k+2 \end{pmatrix} \in M_3(R)$$

$$\det B = k \det\begin{pmatrix} 0 & -2 & k+3 \\ 1 & -1 & 0 \\ k & -1 & k+2 \end{pmatrix} = k \det\begin{pmatrix} 0 & -2 & k+3 \\ 1 & 0 & 0 \\ k & k-1 & k+2 \end{pmatrix}$$

det B= k·1·$(-1)^{2+1}$[-2(k+2)-(k+3)(k-1)]= …

= k(k^2+4k + 1)

dunque

det B ≠ 0 ⇔ [k≠0 ∧ k ≠ -2+ $\sqrt{3}$ ∧ k ≠ -2- $\sqrt{3}$]

Esercizio 4

Determinare per quali valori del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ il determinante delle seguenti matrici **è nullo**.

$$C = \begin{pmatrix} 9 & -k & 3 & 1 \\ 0 & k & -3k & 0 \\ 1 & 0 & 0 & k^2 \\ 0 & -1 & k+5 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(R).$$

$$\det C = -k \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 9 & -k & 3 & 1 \\ 0 & -1 & k+5 & 0 \end{pmatrix} = -k \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -k & 3 & -9k^2+1 \\ 0 & -1 & k+5 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -k \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3-3k & -9k^2+1 \\ 0 & 0 & k+2 & 0 \end{pmatrix} = k \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & k^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -9k^2+1 & 3-3k \\ 0 & 0 & 0 & k+2 \end{pmatrix} =$$

$=k(-9k^2+1)(k+2)=k(-3k+1)(-3k-1)(k+2)$

$\det C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ **[$k=0 \vee k=1/3 \vee k=-1/3 \vee k=-2$]**

Esercizi da svolgere

Determinare per quali valori del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ il determinante della seguente matrice è nullo.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & k-1 & -4 & 6 \\ k & 0 & k & 6k \\ 0 & 0 & 2+3k & -6k \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad k = 0 \quad \text{o} \quad k = 2/17$$

$$E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & k \\ 9 & -k & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & k+2 \\ 0 & -1 & k+5 & 0 \end{pmatrix} \qquad k = 2 \quad \text{o} \quad k = \frac{-19 \pm 5\sqrt{17}}{4}$$

Ulteriori teoremi riguardanti il determinante

Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$, allora valgono le seguenti proprietà del determinante:

Teorema della trasposta

$$\det A = \det {}^tA$$

Teorema di Binet:

Se $B \in M_n(\mathbb{K})$, allora $\det(AB) = \det A \det B$

Secondo teorema di Laplace

La somma dei prodotti di una riga/colonna per i complementi algebrici degli elementi nella stessa posizione ma di un'altra riga/colonna è nulla.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\Gamma_{i,j} = 0 \qquad se \qquad i \neq k$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\Gamma_{i,k} = 0 \qquad se \qquad j \neq k \cdot$$

Tali proprietà non sono qui dimostrate.

Verifichiamo il II teorema di Laplace con un esempio.

Esempio

$A \in M_3(\mathbb{R})$, verifichiamo la formula fissando la seconda colonna e i complementi algebrici degli elementi della terza colonna.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$a_{1,2}\Gamma_{1,3} + a_{2,2}\Gamma_{2,3} + a_{3,2}\Gamma_{3,3} = \ ?$$

calcoliamo i complementi algebrici:

$$\Gamma_{1,3} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\Gamma_{2,3} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Gamma_{3,3} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$a_{1,2}\Gamma_{1,3} + a_{2,2}\Gamma_{2,3} + a_{3,2}\Gamma_{3,3} = 1(-2)+0+(-1)(-2)=0$$

Inversa di una matrice quadrata

Data $A \in M_n(\mathbb{K})$, si dice che A è invertibile se esiste $B \in M_n(\mathbb{K})$ (in seguito indicheremo $B=A^{-1}$) tale che:

$$AB=BA= I_n$$

dove I_n è l'elemento neutro del prodotto tra matrici quadrate di ordine n.

Teorema

Una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{K})$ è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

Dimostrazione

$$\Longrightarrow$$

Se $AB= I_n$ allora, poiché il $\det I_n=1$, per il teorema di Binet $\det(AB)= \det A \cdot \det B=1 \Rightarrow \det A \neq 0$.

$$\Longleftarrow$$

Ipotizzando che $\det A \neq 0$, costruiamo la matrice B nel seguente modo:

$$B=\begin{pmatrix} \frac{\Gamma_{1,1}}{\det A} & \frac{\Gamma_{2,1}}{\det A} & \cdots & \frac{\Gamma_{n,1}}{\det A} \\ \frac{\Gamma_{1,2}}{\det A} & \frac{\Gamma_{2,2}}{\det A} & \cdots & \frac{\Gamma_{n,2}}{\det A} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\Gamma_{1,n}}{\det A} & \frac{\Gamma_{2,n}}{\det A} & \cdots & \frac{\Gamma_{n,n}}{\det A} \end{pmatrix}$$

ove $\Gamma_{i,j}$ è il complemento algebrico dell'entrata (i,j) nella matrice A. Verifichiamo che il prodotto tra A e B fornisce la matrice I_n. Moltiplichiamo la i-esima riga di A con la j-esima colonna di B:

$$a_{i,1}b_{1,j}+ a_{i,2}b_{2,j} +\ldots+a_{i,n}b_{n,j}=$$

$$=(a_{i,1}\Gamma_{j,1}+ a_{i,2}\Gamma_{j,2} +\ldots+a_{i,n}\Gamma_{j,n})/\det A=$$

Abbiamo due casi:

$$\begin{cases} =1 & \textbf{se } \mathbf{i=j} \text{ infatti } a_{i,1}\Gamma_{j,1}+ a_{i,2}\Gamma_{j,2} +\ldots+a_{i,n}\Gamma_{j,n}= \\ & =a_{i,1}\Gamma_{i,1}+ a_{i,2}\Gamma_{i,2} +\ldots+a_{i,n}\Gamma_{i,n} = \det A \text{ per} \\ & \text{il I teorema di Laplace;} \\ =0 & \textbf{se } \mathbf{i\neq j} \text{ allora per il II teorema di Laplace} \\ & a_{i,1}\Gamma_{j,1}+ a_{i,2}\Gamma_{j,2} +\ldots+a_{i,n}\Gamma_{j,n} =0. \end{cases}$$

Dunque l'elemento in posizione (i,j) verifica la definizione data di I_n (lezione 1). Analogamente si dimostra $BA= I_n$.

È facile dimostrare che se esiste un'inversa B di $A \in M_n(\mathbb{K})$, essa è unica.

Per assurdo: supponiamo esista un'altra matrice inversa C tale che $AC=CA= I_n$.

Dimostriamo che B=C infatti:

$$C=C\,I_n=C(AB)=(CA)B= I_nB=B. \quad \text{c.v.d.}$$

(motivare le uguaglianze)

Dunque le due proposizioni stabiliscono la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza e unicità della matrice inversa di $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Il teorema della matrice inversa è costruttivo.

Esso fornisce il metodo per costruire la matrice inversa A^{-1}.

Calcolare il determinante di A:

1) se det A=0, allora non esiste l'inversa.

2) Se det A≠0, allora esiste la matrice inversa.

In tal caso:

- scrivere la trasposta di A e calcolare ordinatamente i complementi algebrici;

- costruire la matrice inversa dividendo tutti i complementi algebrici per il determinante di A.

Esercizio 1

Calcolare, se esiste, la matrice inversa di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \in M_2(R)$$

Calcolo il determinante: det A= -11. Esiste la matrice inversa.

Scrivo la matrice trasposta:

$${}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

I complementi algebrici sono scritti nell'ordine con il quale si ricavano da ^{t}A, ma hanno la notazione ricavata da A:

$$\Gamma_{1,1}=-3 \qquad \Gamma_{2,1}=-2$$

$$\Gamma_{1,2}= - 4 \qquad \Gamma_{2,2}=1$$

Dividendo tali scalari per -11=det A si ottiene la matrice inversa:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/11 & 2/11 \\ 4/11 & -1/11 \end{pmatrix}$$

Prova:….

Esercizio 2

Calcolare, se esiste, la matrice inversa di

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(R)$$

Calcolo il determinante: det B= - 6.

Esiste la matrice inversa.

Scrivo la matrice trasposta:

$$^{t}B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

I complementi algebrici sono scritti nell'ordine con il quale si ricavano da ^{t}B, ma hanno la notazione ricavata da B:

$\Gamma_{1,1}$=-2 $\Gamma_{2,1}$=-1 $\Gamma_{3,1}$=-3

$\Gamma_{1,2}$= 0 $\Gamma_{2,2}$=-3 $\Gamma_{3,2}$ =-9

$\Gamma_{1,3}$= 0 $\Gamma_{2,3}$=0 $\Gamma_{3,3}$ = 6

Dividendo tali scalari per -6=det B si ottiene la matrice inversa:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Prova:….

Esercizio 3

Calcolare, se esiste, la matrice inversa di

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Lambda_{4,4}(R)$$

Calcolo il determinante: det C=7.

Esiste la matrice inversa.

Scrivo la matrice trasposta:

$$^{t}C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I complementi algebrici:

$\Gamma_{1,1}=1$ $\Gamma_{2,1}=2$ $\Gamma_{3,1}=0$ $\Gamma_{4,1}=0$

$\Gamma_{1,2}= 0$ $\Gamma_{2,2}=0$ $\Gamma_{3,2} =7$ $\Gamma_{4,2}=0$

$\Gamma_{1,3}= \dots$ $\Gamma_{2,3}=\dots$ $\Gamma_{3,3} = \dots$ $\Gamma_{4,3}=\dots$

$\Gamma_{1,4}= \dots$ $\Gamma_{2,4}=\dots$ $\Gamma_{3,4} = \dots$ $\Gamma_{4,4}=\dots$

Dividendo tali scalari per 7=detC si ottiene la matrice inversa:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3/7 & -1/7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Prova:….

Esercizio 4

Stabilire per quali valori di k, numero reale, la seguente matrice è invertibile.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & k-3 & -k \\ 4 & -1 & 2 & 2k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 3-k & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice è invertibile se e solo se il determinante è non nullo.

… Si ottiene che det D≠0 se e solo se $7k^2$-…k+…≠0. Tale relazione è sempre verificata in quanto Δ<0.

D è sempre invertibile.

Esercizi da svolgere

Calcolare, se esistono, le matrici inverse di:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$