Minori di una matrice

Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, si definisce **minore di ordine p** con $p \in \mathbb{N}$, $p \leq \text{minimo}\{m,n\}$, estratto da A una matrice ottenuta togliendo da A m-p righe ed n-p colonne.

Osservazioni:

1) è evidente che un minore di ordine p è una sottomatrice quadrata di ordine p estratta da A in quanto rimangono esattamente p righe e p colonne.

2) In generale esistono più minori di ordine p estratti in quanto è possibile togliere da A righe e le colonne differenti.

Esempio

Data la matrice E estraiamo due minori di ordine 3 differenti:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in R^{4,6}$$

p=3, m=4 e n=6:

dobbiamo togliere m – p = 4 - 3=1 righe

e n – p = 6 – 3 = 3 colonne.

a) togliendo la prima riga, la seconda, la quarta e la quinta colonna si ottiene:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(R)$$

b) togliendo la seconda riga , la prima, la terza e la quarta colonna si ottiene:

$$M_2 = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \in M_3(R)$$

I minori di ordine 3 sono numerosi…

Casi particolari: i minori di ordine 1 che si possono estrarre da E sono $4\times 6=24$ e quelli di ordine 4 sono …..

Data una matrice $A\in M_n(\mathbb{K})$ quadrata di ordine n, indichiamo con **$A_{i,j}$ il minore di ordine n-1** di A ottenuto togliendo da A la i-esima riga e la j-esima colonna.

Esempio 1

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}\in M_2(K)$$

Per i,j=1,2 i minori estratti di ordine 1 sono i quattro $A_{i,j}\in M_1(\mathbb{K})$:

$A_{1,1}=(a_{2,2})$, $A_{1,2}=(a_{2,1})$, $A_{2,1}=(a_{1,2})$ e $A_{2,2}=(a_{1,1})$.

Esempio 2

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}\in M_3(K)$$

Per i, j=1,2,3 i minori estratti di ordine 2 sono i nove $A_{i,j}\in M_2(\mathbb{K})$:

$$A_{1,1}=\begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}\in M_2(K)$$

$$A_{1,2}=\begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{pmatrix}\in M_2(K)$$

$$A_{1,3}=\begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix}\in M_2(K)$$

$$A_{2,1}=\begin{pmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}\in M_2(K) \quad \ldots$$

Il determinate di una matrice quadrata

Sia $A \in M_n$ ($\mathbb{K}$) una matrice quadrata di ordine n, definiamo determinate di A e lo indichiamo con **detA** o $|\mathbf{A}|$, l'elemento di $\mathbb{K}$ definito ricorsivamente nel seguente modo:

- Se n=1 allora la matrice è del tipo $A=(a_{1,1})$ e $\mathbf{detA:=a_{1,1}}$.
- Se n>1, supponendo di saper calcolare i determinanti delle matrici quadrate di qualsiasi ordine k con $k \leq n-1$, definiamo per ogni coppia di indici (i,j) con i,j=1,…,n il **complemento algebrico di $\mathbf{a_{i,j}}$** come lo scalare $\mathbf{\Gamma_{i,j}}$

$$\mathbf{\Gamma_{i,j} := (-1)^{i+j} \det A_{i,j}}$$

e il determinante come:

$$\mathbf{detA := a_{1,1}\Gamma_{1,1} + a_{1,2}\Gamma_{1,2} + \ldots + a_{1,n}\Gamma_{1,n}}$$

(sviluppo del determinante seguendo la I riga di A).

Calcolo del determinante di matrici quadrate di ordine 2

Data la matrice:

$$\text{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \in M_2(K)$$

$\Gamma_{1,1} := (-1)^{1+1} \det A_{1,1} = + a_{2,2}$

$\Gamma_{1,2} := (-1)^{1+2} \det A_{1,2} = - a_{2,1}$

allora det A = $\mathbf{a_{1,1}\Gamma_{1,1} + a_{1,2}\Gamma_{1,2}} = \boxed{\mathbf{a_{1,1}\, a_{2,2} - a_{1,2}\, a_{2,1}}}$

Esercizio 1

$$\text{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(R)$$

$\Gamma_{1,1} := (-1)^{1+1} \det A_{1,1} = \ldots..$

$\Gamma_{1,2} := (-1)^{1+2} \det A_{1,2} = -(-1) = \ldots..$

allora det A = $\mathbf{a_{1,1}\Gamma_{1,1} + a_{1,2}\Gamma_{1,2}} = \boxed{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

Esercizio 2

Prima di cercare una formula per il determinante delle matrici quadrate di ordine 3 calcoliamolo per

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in M_3(R)$$

det$B$:= $b_{1,1}\Gamma_{1,1}$+ $b_{1,2}\Gamma_{1,2}$ +$b_{1,3}\Gamma_{1,3}$

det$B$= $2\cdot\Gamma_{1,1}+ 0\cdot\Gamma_{1,2} +(-3)\cdot\Gamma_{1,3}$

d'altra parte:

$\Gamma_{1,1}$:= $(-1)^{1+1}$ det $B_{1,1}$= (+1)(1·(1/2)- 0·1)=1/2

$\Gamma_{1,2}$:= $(-1)^{1+2}$ det $B_{1,2}$= (-1)(3·(1/2)- 0·1)=-3/2

$\Gamma_{1,3}$:= $(-1)^{1+3}$ det $B_{1,3}$= (+1)(1·3 - 1·1)=2

Quindi:

det B= 2·…+ 0·…..+(-3)·…..= $\boxed{\ldots\ldots}$

Calcolo del determinante di matrici quadrate di ordine 3

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in M_3(K)$$

$\Gamma_{1,1} := (-1)^{1+1} \det A_{1,1}$

$\Gamma_{1,2} := (-1)^{1+2} \det A_{1,2}$

$\Gamma_{1,3} := (-1)^{1+3} \det A_{1,3}$

ma

$$\det A_{1,1} = \det \begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}$$

$$\det A_{1,2} = \det \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{pmatrix} = a_{2,1}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,1}$$

$$\det A_{1,3} = \det \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix} = a_{2,1}a_{3,2} - a_{2,2}a_{3,1}$$

$\Gamma_{1,1} := (-1)^{1+1} \det A_{1,1} = a_{2,2}\, a_{3,3} - a_{2,3}\, a_{3,2}$

$\Gamma_{1,2} := (-1)^{1+2} \det A_{1,2} = -(a_{2,1}\, a_{3,3} - a_{2,3}\, a_{3,1})$

$\Gamma_{1,3} := (-1)^{1+3} \det A_{1,3} = a_{2,1}\, a_{3,2} - a_{2,2}\, a_{3,1}$

infine

$\mathbf{\det A := a_{1,1}\, \Gamma_{1,1} + a_{1,2}\, \Gamma_{1,2} + a_{1,3}\, \Gamma_{1,3}} = a_{1,1}\,(a_{2,2}\, a_{3,3} +$
$- a_{2,3}\, a_{3,2}) - a_{1,2}\,(a_{2,1}\, a_{3,3} - a_{2,3}\, a_{3,1}) + a_{1,3}\,(a_{2,1}\, a_{3,2} +$
$- a_{2,2}\, a_{3,1}) =$

$$\boxed{\begin{aligned} &= a_{1,1}\, a_{2,2} a_{3,3} + a_{1,2}\, a_{2,3} a_{3,1} + a_{1,3}\, a_{2,1} a_{3,2} + \\ &- (a_{1,1}\, a_{2,3}\, a_{3,2} + a_{1,3}\, a_{2,2} a_{3,1} + a_{1,2}\, a_{2,1} a_{3,3}) \end{aligned}}$$

Per ricordarsi si può utilizzare il seguente grafico:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

È possibile utilizzare questo metodo (di Sarrus) ricordandosi che vale solo ed esclusivamente per il calcolo di determinanti di matrici **al massimo di ordine 3**.

Esercizio 3

Calcolare il determinante di

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(R)$$

Calcoliamo il determinante sviluppandolo seguendo la I riga:

$$\mathbf{detC := c_{1,1}\Gamma_{1,1} + c_{1,2}\Gamma_{1,2} + c_{1,3}\Gamma_{1,3} + c_{1,4}\Gamma_{1,4} =}$$

$$\mathbf{= 1 \cdot \Gamma_{1,1} + 0 \cdot \Gamma_{1,2} + (-1) \cdot \Gamma_{1,3} + (-2) \cdot \Gamma_{1,4}}$$

$$\Gamma_{1,1} = (-1)^2 \det C_{1,1} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Gamma_{1,2} = (-1)^3 \det C_{1,2} = -\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -(-4)$$

$$\Gamma_{1,3} = (-1)^4 \det C_{1,3} = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -8$$

$$\Gamma_{1,4} = (-1)^5 \det C_{1,4} = -\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

det C= …..+ ….. + …… +…… = …..

Primo teorema di Laplace

Data una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ quadrata di ordine n il determinante di A è:

$$\mathbf{det\ A = a_{i,1}\Gamma_{i,1} + a_{i,2}\Gamma_{i,2} + \ldots + a_{i,n}\Gamma_{i,n} =}$$

$$= \sum_{h=1}^{n} a_{i,h}\Gamma_{i,h} \in K$$

(I teorema di Laplace, primo enunciato)

per ogni i=1,…,n fissato (sviluppo secondo la i-esima riga)

$$\mathbf{det\ A= a_{1,j}\Gamma_{1,j}+ a_{2,j}\Gamma_{2,j} +\ldots+a_{n,j}\Gamma_{n,j}=}$$

$$= \sum_{h=1}^{n} a_{h,j}\Gamma_{h,j} \in K$$

(I teorema di Laplace, secondo enunciato)

per ogni j=1,…,n fissato (sviluppo secondo la j-esima colonna).

Conseguenze importanti

1) Potendo scegliere una qualsiasi riga (o colonna) di una matrice quadrata converrà selezionare quella con il maggior numero di zeri.

2) Se una riga o una colonna contiene tutti zeri, allora la matrice avrà determinante nullo.

Esercizio 4

Calcolare il determinante di

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(R)$$

Calcoliamo il determinante sviluppandolo seguendo la II riga perché contiene il maggior numero di zeri:

$$\mathbf{det\ D := d_{2,1}\Gamma_{2,1} + d_{2,2}\Gamma_{2,2} + d_{2,3}\Gamma_{2,3} + d_{2,4}\Gamma_{2,4}}$$

ma l'unico complemento algebrico che vale la pena di calcolare è quello di $\mathbf{d_{2,2}}$ **:** $\mathbf{\Gamma_{2,2}}$

$$\Gamma_{2,2} = (\text{-}1)^{\cdots\cdots} \det \mathrm{D}_{\cdots\cdots} = \det \begin{pmatrix} \cdots\cdot & \cdots\cdot & \cdots \\ \cdots\cdot & \cdots & \cdots \\ \cdots\cdot & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \cdots\cdot\cdot$$

Allora det D:=$0\cdot\Gamma_{2,1}$+ …….+ $0\cdot\Gamma_{2,3}$ +$0\cdot\Gamma_{2,4}$= ….

Esercizio 5

Calcolare il determinante di

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_5(R)$$

Calcoliamo il determinante sviluppandolo seguendo la I colonna perché contiene il maggior numero di zeri:

det E:= $\mathbf{e_{1,1}\Gamma_{1,1}+ e_{2,1}\Gamma_{2,1} + e_{3,1}\Gamma_{3,1} +e_{4,1}\Gamma_{4,1}+e_{5,1}\Gamma_{5,1}=}$

= ……..= ………

$$\Gamma_{2,1} = (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ora calcolo questo determinante sviluppandolo sulla I colonna (nuovamente perché contiene il maggior numero di zeri)

$$\Gamma_{2,1} = (-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -1\cdot(-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix} =$$

$=\ldots.$

Dunque il determinante di E è …….

Esercizio 6

Calcolare il determinante di

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in M_5(R)$$

Calcoliamo il determinante sviluppandolo seguendo la I colonna perché contiene il maggior numero di zeri:

$$\mathbf{detF:= f_{1,1}\Gamma_{1,1}+ f_{2,1}\Gamma_{2,1} + f_{3,1}\Gamma_{3,1} +f_{4,1}\Gamma_{4,1}+f_{5,1}\Gamma_{5,1}=}$$

$$\mathbf{= f_{1,1}\Gamma_{1,1}= 3\cdot\Gamma_{1,1}}$$

$$\Gamma_{1,1} = (-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -1\cdot(-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} =$$

continuando a sviluppare seguendo le I colonne che via via incontriamo si ottiene: $\Gamma_{1,1}= (-1)\cdot 1\cdot 2\cdot(-2)=4$.

Dunque il determinante di F è 12.

Osservazione

Data una matrice $A\in M_n(\mathbb{K})$ quadrata di ordine n **triangolare superiore**, il determinante di A è dato dal prodotto degli elementi della diagonale principale: **det A = $\mathbf{a_{1,1} \cdot a_{2,2} \ldots \cdot a_{n,n}}$.**

Infatti continuando a sviluppare il determinante rispetto alla prima colonna si ottiene:

$$\det A = a_{1,1}(-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix} a_{2,2} & & & a_{2,n} \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} = \ldots = a_{1,1}a_{2,2}\ldots a_{n,n}$$

Allo stesso risultato si perviene anche nel caso la matrice sia **triangolare inferiore,** sviluppando il determinante sulla prima riga.

Esercizio 7

Calcolare il determinante di

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_5(R)$$

Calcoliamo il determinante sviluppandolo seguendo la IV riga perché contiene il maggior numero di zeri: **det G:=$\mathbf{g_{4,1}\Gamma_{4,1}+g_{4,2}\Gamma_{4,2}+ g_{4,3}\Gamma_{4,3} +g_{4,4}\Gamma_{4,4}+g_{4,5}\Gamma_{4,5}}$=**

= $1\boldsymbol{\Gamma_{4,1}}$ **-2** $\boldsymbol{\Gamma_{4,4}}$

$$\Gamma_{4,1} = (-1)^{1+4}\det\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -(1\cdot(-1)^{3+3}\det\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} +$$

$$+1\cdot(-1)^{3+4}\det\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}) = \dots$$

= -(-33+24)= 9 mentre

$$\Gamma_{4,4} = (-1)^{4+4}\det\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -2(-1)^{3+1}\det\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} +$$

$$+2(-1)^{4+1}\det\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \dots$$

=-2(-33)+ (-2)(15)= 66-30=36

Infine

det G = 1$\Gamma_{4,1}$ -2 $\Gamma_{4,4}$= ……….= ………. = ………

Esercizi da svolgere

Calcolare i determinanti di

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 3 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \in M_2(R)$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(R)$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(R)$$