Quadriche in $\hat{\tilde{E}}_3(\mathbb{C})$

L'equazione cartesiana di una quadrica in coordinate non omogenee (x,y,z)

$\mathcal{Q}$: $a_{1,1}x^2 + a_{2,2}y^2 + a_{3,3}z^2 + 2a_{1,2}xy + 2a_{1,3}xz + 2a_{2,3}yz + 2a_{1,4}x +$
$+2a_{2,4}y + 2a_{3,4}z + a_{4,4} = 0.$

in coordinate omogenee (x_1,x_2,x_3,x_4)

$\mathcal{Q}$: $a_{1,1}x_1^2 + a_{2,2}x_2^2 + a_{3,3}x_3^2 + 2a_{1,2}x_1x_2 + 2a_{1,3}x_1x_3 + 2a_{2,3}x_2x_3 +$

$+2a_{1,4}x_1x_4 + +2a_{2,4}x_2x_4 + 2a_{3,4}x_3x_4 + a_{4,4}x^2_4 = 0.$

corrisponde alla matrice

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{1,4} & a_{2,4} & a_{3,4} & a_{4,4} \end{pmatrix}$$

r(A)=1 la quadrica è composta da due piani coincidenti;

r(A)=2 la quadrica è composta da due piani distinti;

r(A)=3 la quadrica è un cono o un cilindro:

$$\begin{cases} \text{cilindro} \Leftrightarrow \det A^*=0 & \left\{\begin{matrix}\text{iperbolico}\\ \text{ellittico}\\ \text{parabolico}\end{matrix}\right\} \text{conica sezione} \\ \text{cono} \Leftrightarrow \det A^* \neq 0 & AX=0 \ \text{vertice} \end{cases}$$

r(A)=4 la quadrica è GENERALE:

$$\mathbf{det\ A^*=0} \begin{cases} \text{paraboloide iperbolico} \\ \\ \text{paraboloide ellittico} \end{cases} \qquad (\spadesuit)$$

$$\mathbf{det\ A^*\neq 0} \begin{cases} \text{ellissoide} \\ \text{si studia la sezione con } x_4=0 \\ \text{iperboloide} \begin{cases} \text{ellittico} \\ \\ \text{iperbolico} \end{cases} \qquad (\spadesuit) \end{cases}$$

($\spadesuit$) sezioni con i piani tangenti:

iperbolico: due rette reali distinte

parabolico: due rette reali coincidenti

ellittico: due rette complesse coniugate.

Per determinare un'equazione del piano tangente ad un punto $P \in \mathcal{Q}$: $(x_{1P},x_{2P},x_{3P},x_{4P})\ A\ X = 0$.

Esercizio 1

Classificare le seguenti quadriche:

a) $\mathcal{Q}_1$: $x^2+\frac{1}{2}y^2+3/2\,z^2+2x-y+1=0$;

b) $\mathcal{Q}_2$: $x^2+z^2-4=0$;

c) $\mathcal{Q}_3$: $x^2+y^2+z^2+2xy-2x=0$. …

Esercizio 2

Classificare la quadrica di equazione $\mathscr{Q}$: $xy+xz+yz=0$ e di seguito la conica sezione di $\mathscr{Q}$ e α: $x+y+2z=1$.

…

Esercizio 3

Determinare un'equazione cartesiana del luogo geometrico delle rette dello spazio incidenti le tre rette sghembe:

$$r_1 : \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = 3z \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = z + 2 \\ y = 2z \end{cases} \qquad r_3 : \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

…

Luogo di rette che proietta una conica in $E_3(\mathbb{C})$ da un punto esterno alla conica:

cilindro (punto improprio), cono (punto proprio)

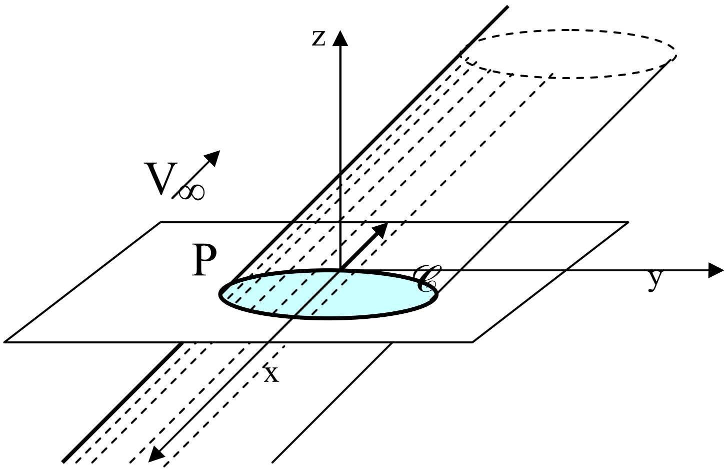
Esercizio 4 (es.5 I appello 2009)

In $E_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana del luogo $\mathscr{Q}$ delle rette che proiettano i punti della curva $\mathscr{C}$: $\begin{cases} x^2+y^2-2x=0 \\ z=0 \end{cases}$ dal punto $V_\infty=[(0,1,1,0)]$.

Si riconoscano le sezioni di $\mathscr{Q}$ con i piani:

α: z=2, β: y-z=0.

La curva $\mathscr{C}$ è una circonferenza ottenuta per esempio sezionando la sfera : $x^2+y^2+z^2-2x=0$ di centro C=(1,0,0) e raggio r=1 con il piano coordinato z=0.



Il luogo delle rette che proiettano i punti della circonferenza dal punto improprio V_∞ sarà dunque un cilindro ellittico.

Otteniamo una equazione cartesiana ragionando nel seguente modo: sia P $=(x_P,y_P,z_P)$ un punto della circonferenza $\mathscr{C}$ allora le sue coordinate devono soddisfare le equazioni caratteristiche:

$$\mathscr{C}: \begin{cases} x_P{}^2 + y_P{}^2 - 2\, x_P = 0 \\ z_P = 0 \end{cases} \qquad (\clubsuit)$$

Il punto improprio fornisce i parametri direttori delle rette che passeranno per V_∞: $[(0,1,1)]$.

Il luogo delle rette è caratterizzato dalle equazioni parametriche delle rette passanti per P con par.dir. [(0,1,1)]:

$$\begin{cases} x = x_P + 0\lambda \\ y = y_P + 1\lambda \qquad \lambda \in R \\ z = z_P + 1\lambda \end{cases}$$

da cui $x_P=x$, $y_P=y-\lambda$ e $z_P= z-\lambda$.

Utilizzando la II eq. di (♣) si ricava che $z=\lambda$ e imponendo che il punto P appartenga alla curva $\mathscr{C}$:

$$x_P^{\ 2}+ y_P^{\ 2}-2\, x_P =0$$

$$(x)^2+ (y-\lambda)^2-2\, x =0$$

$$(x)^2+ (y-z)^2-2\, x =0$$

ossia $\mathscr{Q}$: $x^2+ y^2 + z^2 - 2yz - 2x =0.$

(verificare che si tratta di un cilindro…)

Le sezioni del cilindro ellittico possono essere solo di due tipi:

ellissi, se il vertice improprio non appartiene al piano sezione;

rette parallele in $E_3(\mathbb{C})$, se il vertice improprio appartiene al piano.

Dunque con il piano α si ottiene un'ellisse.

$$\begin{cases} x^2+ y^2 + z^2 - 2yz - 2x =0 \\ z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+ y^2 + z^2 - 4y - 2x =0 \\ z=2 \end{cases}$$

Questa ellisse è, in particolare, una circonferenza perchè equivalente ad una sezione piana di sfera.

Il piano β: y-z=0 passa per V_∞; otteniamo due rette

$$x^2+ y^2 + z^2 - 2yz - 2x =0 \quad \text{con} \quad y=z$$

$$x^2+ y^2 + y^2 - 2yy - 2x =0 \quad \Rightarrow \quad x(x-2)=0.$$

$$r_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 2 \\ y = z \end{cases} .$$

Esercizio 5 (es.5 II appello 2009)

In $E_3(\mathbb{C})$ è dato il piano π: x+y-1=0. Si determinino le rappresentazioni cartesiane delle sfere di raggio $2\sqrt{2}$ tangenti a π nel punto P=(1,0,1).

Sia $\mathscr{C}$ la curva ottenuta intersecando Σ: $x^2+y^2+z^2-6x-$ $+4y-2z+6=0$ con il piano z=1. Si determini l'equazione cartesiana del cono che proietta la curva $\mathscr{C}$ dall'origine O=(0,0,0).

La retta dei centri è ortogonale al piano π di parametri direttori [(1,1,0)], passa per P dunque di eq.

$$x=1+t,\ y=0+t,\ \ z=1+0t\ \ t\in\mathbb{R}.$$

Il centro ha coordinate parametriche C=(1+t,t,1) e la distanza d(C, π)= $2\sqrt{2}$: $\quad |1+t+t-1|/\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

Risolvendo l'equazione si ottiene t = ±2 e due centri C_1=(3,2,1) e C_1=(-1,-2,1).

Conseguentemente le equazioni di due sfere:

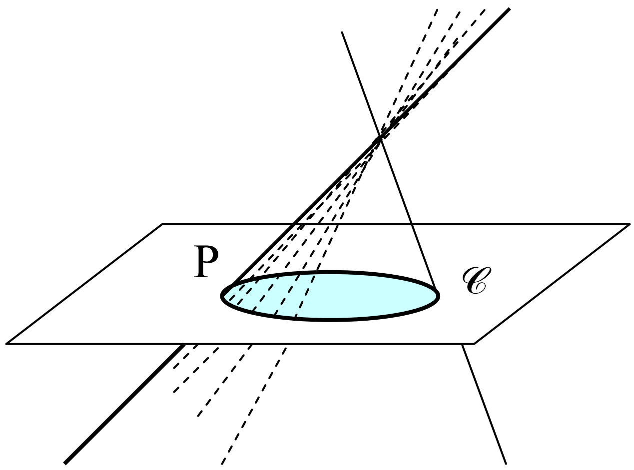
$$(x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=8 \quad (\text{ superficie } \Sigma\ )$$

$$(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=8.$$

La curva assegnata è una circonferenza a punti reali

$$\mathscr{C}: \begin{cases} x^2+y^2+z^2-6x - 4y - 2z+6=0 \\ z=1. \end{cases}$$

Il luogo richiesto è il luogo $\mathscr{Q}$ delle rette che proiettano i punti della curva C dal punto O: un cono.



Sia $P=(x_P,y_P,z_P)$ un punto della circonferenza $\mathscr{C}$ allora le sue coordinate dovranno soddisfare le equazioni caratteristiche:

$$\mathscr{C}: \quad \begin{cases} x_P^2+y_P^2+z_P^2-6x_P - 4y_P - 2z_P+6=0 \\ z_P=1 \end{cases} \quad . \quad (\clubsuit)$$

L'origine fornisce le coordinate del vertice.

Il luogo delle rette sarà caratterizzato dalle equazioni parametriche delle rette passanti per O con par.dir. [(l,m,n)]:

$$\begin{cases} x = 0 + l\lambda \\ y = 0 + m\lambda \qquad \lambda \in R \\ z = 0 + n\lambda \end{cases}$$

I parametri direttori possono essere ottenuti come componenti del vettore $\overrightarrow{OP}=(x_P-0, y_P-0, z_P-0)$.

Le rette dunque hanno equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 0 + x_P\lambda \\ y = 0 + y_P\lambda \qquad \lambda \in R \\ z = 0 + z_P\lambda \end{cases}.$$

Isolando $x_P=x/\lambda$, $y_P=y/\lambda$ e $z_P=z/\lambda$.

Dalla seconda equazione di (♣) ricaviamo che $z=\lambda$.

Ora imponiamo che il punto P appartenga alla curva $\mathscr{C}$ utilizzando anche la prima equazione di (♣):

$$x_P^2+y_P^2+z_P^2-6x_P - 4y_P - 2z_P+6=0$$

$$(x/\lambda)^2+(y/\lambda)^2+(z/\lambda)^2-6(x/\lambda) – 4(y/\lambda) – 2(z/\lambda)+6=0$$

$$(x/z)^2+(y/z)^2+(z/z)^2-6(x/z) – 4(y/z) – 2(z/z)+6=0.$$

Svolgendo i calcoli:

$$\mathscr{Q}: \quad x^2+y^2+5z^2-6xz - 4yz=0.$$

Esercizio 6

Date in $E_3(\mathbb{R})$ le rette r: x-y=x-z=0 e s: x+z-2= 2x+y-3=0:

1) si determini la reciproca posizione;

2) si determini l'equazione cartesiana della superficie $\mathscr{S}$ individuata dalla rotazione della retta r attorno alla retta s;

3) si classifichi la sezione ottenuta da $\mathscr{S}$ con il piano x-y+1=0.

1) Il rango di entrambe le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

è 3: rette incidenti.

2) Costruiamo $\mathscr{S}$ come superficie di rotazione:

- un punto P di r ha coordinate P=(t,t,t), $t\in R$;
- il piano ortogonale a s per P è σ: x-2y-z+2t=0;

- il centro della circonferenza generata dalla rotazione di P attorno ad r è

$$s\cap\sigma=C'=((4-t)/3,(1+2t)/3,(2+t)/3);$$

- la distanza PC'$=\frac{\sqrt{21}}{3}|1-t|$;
- la circonferenza (t fissato) ha equazioni:

$$\gamma_t:\begin{cases}\left(x-\frac{4-t}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1+2t}{3}\right)^2+\left(z-\frac{2+t}{3}\right)^2=\frac{21}{9}(1-t)^2\\ x-2y-z+2t=0\end{cases}.$$

Isolando dalla seconda equazione t=1/2(z+2y-x) e sostituendo nella prima si ottiene:

$$\boxed{\mathscr{S}:\ x^2-8y^2+z^2+12xy-12yz+6xz+16y-20x+4z=0.}$$

3) La quadrica ha matrice:

$$\begin{pmatrix}1 & 6 & 3 & -10\\ 6 & -8 & -6 & 8\\ 3 & -6 & 1 & 2\\ -10 & 8 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

con determinante nullo e detA*≠0: cono (di vertice V=(1,1,1)).

Il piano che interseca la quadrica non passa per il vertice; studio la conica sezione

$$\mathscr{C} \quad \begin{cases} x^2 - 8y^2 + z^2 + 12xy - 12yz + 6xz + 16y - 20x + 4z = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

all'infinito $\mathscr{C} \cap \pi_\infty$:

$$\begin{cases} x_1^{\ 2} - 8x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2} + 12x_1x_2 - 12x_2x_3 + 6x_1x_3 + 16x_2x_4 - 20x_1x_4 + 4x_3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

si ottiene l'equazione $\ldots\ldots = 0$ dei punti impropri comuni tra conica e piano: …... La conica è un ……..