A) Risoluzione del secondo test 2007 (28/11/2007)

B) Risoluzione del secondo test 2008 (22/12/2008)

C) Dal secondo test Corso Meccanica 2005 es. 2 e 3. di seguito riportati

Esercizio 2

Si considerino le rette:

$$r_1 : \begin{cases} x = 3 + kt \\ y = 2 + 3t \\ z = 5t \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione parametrica della retta r_2.

(b) Per quali valori di k le rette r_1 e r_2 sono sghembe?

(c) Per quali valori di k esiste un piano α parallelo a r_1, parallelo a r_2 e passante per i punti (1,0,1) e (1,0,-1)?

(d) Posto k=6 trovare una retta ortogonale a r_1, complanare ad r_2 e passante per l'origine.

Ricordiamo che per ottenere una rappresentazione parametrica si può porre un'incognita, opportunamente scelta, uguale a t (chiaramente non z) :

$$\boxed{r_2 : \begin{cases} x = t \\ y = -\dfrac{1}{2}t \\ z = 1 \end{cases}}$$

Poiché i parametri direttori (1,-1/2,0) sono definiti a meno di un fattore di proporzionale, posso scegliere [(-2,1,0)] e ottengo un'altra rappresentazione parametrica :

$$r_2 : \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$$

(b) Le rette sono entrambe in forma parametrica e conviene ragionare come segue: detti R=(3,2,0) ed S=(0,0,1) due punti distinti rispettivamente di r_1 e r_2 , le rette sono sghembe se i vettori che hanno per componenti i parametri direttori delle rette e il vettore $\overrightarrow{SR}$ risultano linearmente indipendenti. $\overrightarrow{SR}$ =(3,2, -1)

$$\boxed{\det\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ k & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ldots \qquad \Leftrightarrow \qquad k \neq \ldots}$$

(c) Un piano così fatto deve contenere la retta che passa per (1,0,1) e (1,0,-1) di parametri direttori [(0,0,2)]. Questa volta i parametri direttori dovranno essere linearmente dipendenti tra loro

$$\boxed{\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ k & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\ldots \qquad \Leftrightarrow\ 2(\mathrm{k}+6)\ldots \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{k}\ldots}$$

Tale condizione corrisponde a chiedere che quattro punti (due propri e due impropri siano complanari):

$$\det\begin{pmatrix} k & 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} k & 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1+1 & 0 & 1-1 & 1+1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} k & 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} k-0 & 3 & 5 & 0 \\ -2-0 & 1 & 0 & 0 \\ 2-2 & 0 & 0 & 2 \\ 1-1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

(d)

$$= \det\begin{pmatrix} k & 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \ldots \quad \Leftrightarrow\ 2(\mathrm{k}+6)\ldots \quad \Leftrightarrow\ \mathrm{k}\ldots$$

Osservazione: la retta deve passare per O, dunque anche i piani che la individuano.

Posto k=6, i parametri direttori della retta r_1 sono [(6,3,5)]; la retta ortogonale può essere ottenuta come sezione di un piano ortogonale ad r_1 :

$$6x + 3y + 5z + d = 0$$

Imponendo il passaggio per l'origine: 6x +3y + 5z ….. .

D'altra parte la retta deve essere complanare con r_2 e deve passare per l'origine. Tra tutti i piani del fascio proprio di piani di asse r_2 devo ricercare quello passante per O: è evidente che si tratta di x+2y…..

$$\boxed{s:\begin{cases}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}}$$

Esercizio 3

Riconoscere la conica $\mathcal{C}$: $5x^2 + 2xy + 2y^2 + 8y + 6 = 0$ e determinare le coordinate del centro.

Determinare le equazioni degli assi e degli asintoti.

<u>Classificazione</u>

$$\det\begin{pmatrix}5 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 4\\ 0 & 4 & 6\end{pmatrix} \neq 0 \quad \det A^* = 10 - 1 > 0 \quad \text{Conica ....,\ ....}$$

<u>Centro</u>

Il centro è l'intersezione di due diametri qualsiasi:

le polari di X_∞ e Y_∞ sono $5x+y=0$ e $x+2y+4=0$; intersecandole si ottiene $x=4/9$ $y=-20/9$. $C=(4/9;-20/9)$

<u>Assi</u>

Determino i parametri direttori degli assi utilizzando la formula $a_{12}\, l^2 + (a_{22} - a_{11})lm - a_{12}m^2=0$:

$$l^2 + (2 - 5)lm - m^2=0$$

risolvendo rispetto a l ottengo

$$l = \frac{3m \pm m\sqrt{13}}{2}$$

Dunque i parametri direttori risultano:

$$\left[\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2},1\right)\right] \quad \left[\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2},1\right)\right]$$

Costruendo le rette che passano per il centro C si ottengono:

$$x - \frac{3+\sqrt{13}}{2}y - \frac{34+10\sqrt{13}}{9} = 0$$
$$x - \frac{3-\sqrt{13}}{2}y - \frac{34-10\sqrt{13}}{9} = 0\,.$$

<u>Asintoti</u>

Ricerco i punti impropri dell'ellisse:

$$\begin{cases} 5x_1^{\ 2} + 2x_1x_2 + 2x_2^{\ 2} + 8x_2x_3 + 6x^2{}_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

si ottiene l'equazione $5x_1^{\ 2} + 2x_1x_2 + 2x_2^{\ 2} = 0$

da risolvere o rispetto a x_1 o a x_2 ottenendo soluzioni complesse:

$$x_1 = \frac{-x_2 \pm 3ix_2}{5} \qquad i = \sqrt{-1} \; .$$

I punti impropri hanno dunque coordinate omogenee

((-1+3i)/5,1,0) e ((-1-3i)/5,1,0).

Le polari di tali punti danno le equazioni degli asintoti.

In alternativa costruisco le rette con parametri direttori [((-1+3i)/5,1)] e [((-1-3i)/5,1)] passanti per C.

$$x - \frac{3i-1}{5}y - \frac{4}{3}i = 0$$

$$x + \frac{3i+1}{5}y + \frac{4}{3}i = 0 \; .$$

Le equazioni ottenute sono equivalenti (moltiplicando per i) anche a: $ix \pm \frac{3+i}{5}y \pm \frac{4}{3} = 0$.