

Fasci di coniche

Esercizio 1

Dato il fascio di coniche di equazione:

$$C_k: (1+k)x^2+(1+k)y^2+2xy-2(1+k)x-2(1+3k)y+1+10k=0:$$

- si studino le coniche della famiglia;
- si determini il luogo dei centri;
- posto $k=-5$ si studi la conica, si determinino il centro, gli assi e gli asintoti della conica.

Svolgimento

Studiamo la matrice delle coniche:

$$\begin{pmatrix} 1+k & 1 & -1-k \\ 1 & 1+k & -1-3k \\ -1-k & -1-3k & 1+10k \end{pmatrix}$$

Il determinante di questa matrice è:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1+k & 1 & -1-k \\ 1 & 1+k & -1-3k \\ -1-k & -1-3k & 1+10k \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1+k-1-k & 1 & -1-k \\ 1-1-3k & 1+k & -1-3k \\ -1-k+1+10k & -1-3k & 1+10k \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1-k \\ -3k & 1+k & -1-3k \\ +9k & -1-3k & 1+10k \end{pmatrix} = 3k \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1-k \\ -1 & 1+k & -1-3k \\ 3 & -1-3k & 1+10k \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 3k \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1-k \\ -1 & 1+k & -1-3k \\ 3-1 & -1-3k+1+k & 1+10k-1-3k \end{pmatrix} = 3k \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1-k \\ -1 & 1+k & -1-3k \\ 2 & -2k & 7k \end{pmatrix} \\
&= 3k \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1-k \\ -1-0 & 1+k-1 & -1-3k+1+k \\ 2 & -2k & 7k \end{pmatrix} = 3k \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1-k \\ -1 & k & -2k \\ 2 & -2k & 7k \end{pmatrix} = \\
&= 3k \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1-k \\ -1 & k & -2k \\ 2-2 & -2k+2k & 7k-4k \end{pmatrix} = 3k \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1-k \\ -1 & k & -2k \\ 0 & 0 & 3k \end{pmatrix} = 9k^2
\end{aligned}$$

Mentre $\det A^* = (1+k)^2 - 1 = k^2 + 2k$.

- per $k=0$ si ottiene una **conica riducibile**

$$(x+y-1)^2=0.$$

- per $k \neq 0$ le coniche sono generali:

per $k=-2$ parabola;

per $-2 < k < 0$ iperboli;

per $k < -2 \vee k > 0$ ellissi.

b) il centro è il punto d'intersezione tra due diametri: la polare di X_∞ è $(1+k)x+1y-(1+k)=0$ (1), mentre la polare di Y_∞ è $x+(1+k)y-(1+3k)=0$ (2):

la soluzione del sistema, al variare di k reale, fornisce il luogo geometrico dei centri; risolvendo il sistema con Cramer ed eliminando il parametro si ottiene l'equazione cartesiana del centri.

$$\boxed{x-y+2=0}.$$

c) Per $k=-5$ si ottiene: $C_{-5}: -4x^2-4y^2+2xy+8x+28y-49=0$ cioè

$$C_{-5}: x^2+y^2-\frac{1}{2}xy-2x-7y+\frac{49}{4}=0 .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -1 \\ -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{7}{2} \\ -1 & -\frac{7}{2} & \frac{49}{4} \end{pmatrix} \text{Conica generale ellisse.}$$

Centro: $\begin{cases} \text{la polare di } X_\infty \text{ è } x-\frac{1}{4}y-1=0 & , \\ \text{la polare di } Y_\infty \text{ è } \frac{1}{4}x-y+\frac{7}{2}=0 & , \end{cases}$

si intersecano in $\boxed{C=(2,4)}$.

Gli assi hanno parametri direttori $l=\pm m$

Le polari di $[(1,1,0)]$ e $[(1,-1,0)]$ sono gli assi:

$$\boxed{x-y+2=0 \text{ e } x+y-6=0}.$$

I punti impropri della conica sono: $\left[\left(\frac{1 \pm i\sqrt{15}}{4}, 1, 0 \right) \right]$.

Le polari $\boxed{x - \frac{1 \pm i\sqrt{15}}{4}y - 1 \pm i\sqrt{15} = 0}$ sono gli asintoti.

Esercizio 2

Dato il fascio di coniche di equazione:

$$C_k: x^2 + ky^2 + 2xy - 2x + 1 + 10k = 0:$$

- si studino le coniche del fascio;
- si determini la conica che ha centro in $C=(0,1)$;
- per quale valore di k il centro appartiene alla retta $2x-3y=0$?
- esiste una conica con asintoto parallelo a $2x+y-3=0$?
- posto $k=0$ si studi la conica ottenuta determinando il centro, gli assi ed eventualmente gli asintoti;
- posto $k=1$ si studi la conica rappresentata e se ne determinino i vertici.

Studiando $\det A = 10k^2 - 10k - 1$ ($\det A = 0$ per $k = (5 \pm \sqrt{35})/10$)
mentre $\det A^* = k - 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & k & 0 \\ -1 & 0 & 1 + 10k \end{pmatrix}.$$

▪ per $k = (5 \pm \sqrt{35})/10$ si ottengono **coniche riducibili**.

Altrimenti coniche generali

- per $k > 1 \wedge k \neq (5 + \sqrt{35})/10$ ellissi;
- per $k = 1$ parabola;
- per $k < 1 \wedge k \neq (5 - \sqrt{35})/10$ iperboli.

b) determino i due diametri $d_1: x+y+1=0$ e $d_2: x+ky=0$ e impongo che il punto appartenga ad entrambi: $k=0$.

c) Se il centro appartiene alla retta $r: 2x-3y=0$ il sistema composto dalle rette $d_1: x+y+1=0$, $d_2: x+ky=0$ e $r: 2x-3y=0$ ammette una sola soluzione: $k=-3/2$.

d) Se una conica ha asintoto parallelo a $2x+y-3=0$ allora ha un punto improprio $[(1,-2,0)]$; come condizione necessaria impongo che la conica passi per tale punto. In coordinate omogenee la conica è di eq. $C_k: x_1^2 + k x_2^2 + 2 x_1 x_2 - 2 x_1 x_3 + (1+10k) x_3^2 = 0$

$$(1)^2 + k (-2)^2 + 2 (1)(-2) - 2 (1)(0) + (1+10k) (0)^2 = 0 \quad k=3/4.$$

Per tale valore la conica è un'iperbole. La condizione posta è anche sufficiente.

e) Per $k=0$ la conica diventa l'iperbole di equazione:

$$x^2 + 2xy - 2x + 1 = 0.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

di centro $C=(0,1)$.

I punti impropri di questa conica sono $[(0,1,0)]$ e $[(-2,1,0)]$; gli asintoti $\boxed{x=0 \text{ e } x+2y-2=0}$.

I parametri direttori degli assi $l^2 - lm - m^2 = 0$ sono:

$$l = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} m \quad \Rightarrow \quad \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, 1 \right) \right] e \quad \left[\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, 1 \right) \right]$$

Gli assi hanno dunque equazioni $\boxed{x - \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} y + \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = 0}$.

f) per $k=1$ la conica è una parabola di asse:

$$a_{11}(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + a_{12}(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) = 0$$

$$2x + 2y - 1 = 0$$

Mettendo in sistema con la parabola di equazione:

$$C_k: x^2 + y^2 + 2xy - 2x + 1 = 0 \text{ otteniamo } \boxed{V = (45/8, -41/8)}.$$

Esercizi da svolgere:

- 1) II test 2008/2009 esercizio 4
- 2) II test 2002/2003 esercizio 1
- 3) tema d'esame 2002/2003 II appello;
- 4) tema d'esame 2001/2002 II appello;
- 5) tema d'esame 2001/2002 III appello.