Esercizio 1

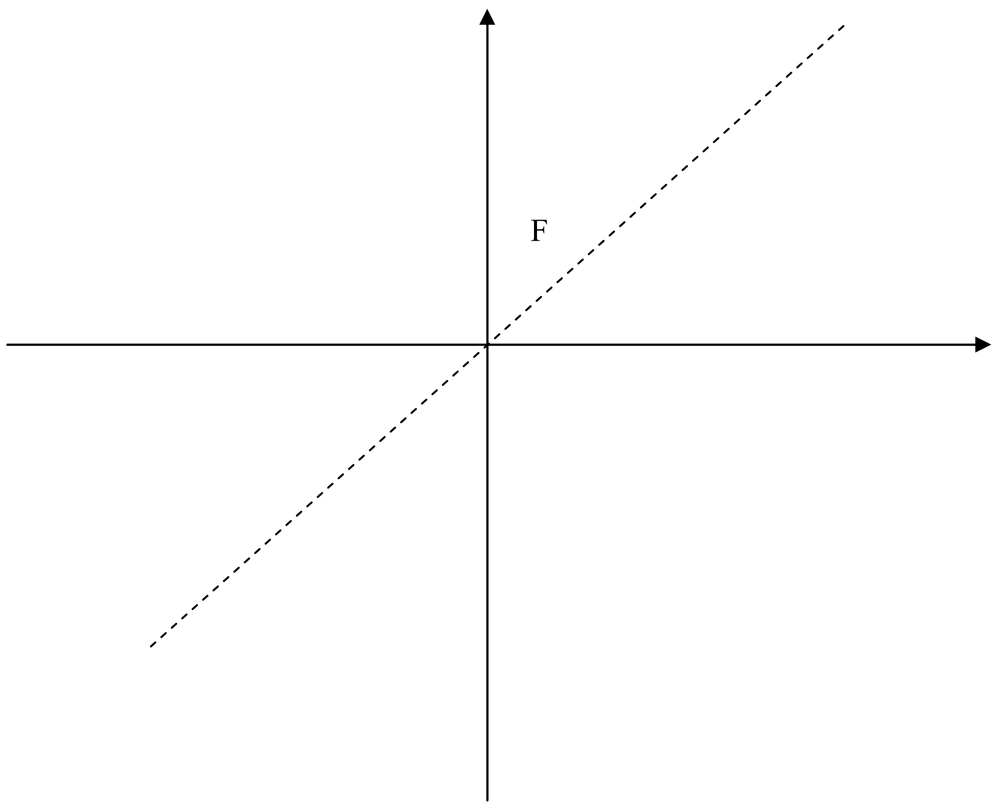
In $\widetilde{E}_2(\mathbb{R})$ si determini l'equazione cartesiana del luogo dei punti equidistanti dal punto F=(1,2) e dalla retta y=x.

a) Si classifichi la conica così ottenuta;

b) Si determini l'asse e il vertice;

c) Si determini la circonferenza tangente alla parabola nel vertice avente il centro sulla retta x-2=0

I punti P=(x,y) hanno distanza dal fuoco:



$$\mathrm{PF} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

hanno distanza dalla direttrice

$$\frac{|y - x|}{\sqrt{2}}$$

Dunque

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \frac{|y - x|}{\sqrt{2}}$$

elevando tutto al quadrato si ottiene

$$\mathscr{C}: \; x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$$

Per definizione di questo luogo si ottiene una parabola:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -4 \\ -2 & -4 & 10 \end{pmatrix}$$

il detA=… (**conica generale**) e detA*=Δ=… (**parabola**)

b) Per determinare l'asse della parabola usiamo la combinazione lineare dei diametri data dalla formula:

$a_{11}(a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}) + a_{12}(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) = 0$

1(……….)+1 (……….)=0.

$$\boxed{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0}$$

(retta perpendicolare alla direttrice passante per il fuoco).

Intersecando l'asse con la conica si ottiene il vertice

$$\boxed{V=(\ldots..;\ldots..)}$$

d) Il centro della circonferenza deve trovarsi sull'asse (per le relazioni tra centro e retta tangente in un punto, in questo caso V) e sulla retta x=2 cioè C=(…;.).

La circonferenza deve passare per il vertice della parabola dunque il raggio CV=…...

Allora la circonferenza è di equazione

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

$$\boxed{(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = \ldots.}$$

Esercizio 2

In $\widetilde{E}_2(R)$ si studi, al variare del parametro reale k, il fascio di coniche:

$\mathscr{C}_k$: $6x^2 - 5xy - 6y^2 - 3k = 0$.

a) Si determini il centro delle coniche;

b) Nel caso k=1 si determinino le equazioni degli asintoti, degli assi e i vertici della conica.

La matrice del fascio è:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -\frac{5}{2} & 0 \\ -\frac{5}{2} & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -3k \end{pmatrix}$$

Il detA=-3k detA*, dove detA*=-(25/4+36), quindi per k≠… rappresentano coniche generali;

- per **k=…** si ottiene una **conica riducibile** (3x+2y)(2x-3y)=0.
- per **k≠..** detA*<0 : le coniche sono delle …….

a) Il centro è fisso di coordinate (0, 0)

intersezione dei due diametri (polari di X_∞ e Y_∞)

$$6x - \frac{5}{2}y = 0 \quad e \quad -\frac{5}{2}x - 6y = 0.$$

b) Ponendo k=1, i punti impropri della conica:

$$\mathscr{C}_1: 6x^2 - 5xy - 6y^2 - 3 = 0$$

sono [(3,2,0)] e [(2,-3,0)]; gli asintoti devono passare per tali punti e il centro [(0,0,1)] (scritto in coordinate omogenee):

a_1: ……..=0
a_2: ……..=0

L'iperbole con asintoti ortogonali si chiama **equilatera**.

Gli assi sono di parametri direttori (l,m):

$$\ldots.\ l^2 - \ldots..\ lm + \ldots.\ m^2=0$$

….

Quindi le equazioni sono:

$x + 5y = 0$ e $5x - y = 0$

I vertici si ottengono mettendo in sistema l'equazione della conica con le equazioni degli assi:

- il sistema conica e retta y=5x ha soluzioni complesse

$$V_3 = \left(\frac{i\sqrt{3}}{13}; \frac{5i\sqrt{3}}{13} \right) \qquad V_4 = \left(-i\frac{\sqrt{3}}{13}; -5i\frac{\sqrt{3}}{13} \right);$$

- il sistema conica e retta x=-5y fornisce le coordinate dei due vertici reali:

$$\boxed{V_1 = \left(\frac{-5\sqrt{3}}{13}; \frac{\sqrt{3}}{13} \right) \qquad V_2 = \left(\frac{5\sqrt{3}}{13}; -\frac{\sqrt{3}}{13} \right)}$$

Esercizi da svolgere

1) Si determinino le equazioni degli assi della conica di equazione $\mathcal{C}$: $x^2+xy+y^2-4x-4y+4=0$. [3x+3y–8=0, x–y=0]

2) Si determini l'equazione cartesiana dell'asse della seguente parabola $\mathcal{C}$: $x^2+4xy+4y^2-3x+2y-5=0$.

[x+2y+1/10=0]

3) Determinare la retta tangente alla conica $\mathcal{C}$: $x^2-2xy-y^2-1=0$, nel punto P=(1,0). [x+y–1=0]

Forma canonica

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \textit{ellisse}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1 \qquad \textit{iperbole}$$

$$y=ax^2 \qquad \textit{parabola}$$

Data la conica di equazione

$\mathscr{C}$: $a_{1,1}x^2 + 2a_{1,2}xy + a_{2,2}y^2 + 2a_{1,3}x + 2\,a_{2,3}y + a_{3,3} = 0$,

utilizzando le informazioni ottenute

a) per le coniche a centro, dalle equazioni degli assi e le coordinate del centro,

b) per la parabola, dall'equazione dell'asse e vertice,

si può costruire un cambiamento di riferimento cartesiano in modo che l'equazione assuma la forma canonica riportata.

Dobbiamo costruire un cambiamento di riferimento cartesiano: da $[O, B_1]$ con $B_1=(e_1,e_2)$ base ortonormale, a $[O', B_2]$ con $B_2=(e'_1,e'_2)$ anch'essa base ortonormale.

Le formule sono quelle di una roto-traslazione:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y sen\alpha + a \\ y' = x sen\alpha + y\cos\alpha + b \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x'\cos\alpha + y' sen\alpha + a' \\ y = -x' sen\alpha + y'\cos\alpha + b' \end{cases}$$

con α indichiamo l'angolo formato tra il primo vettore della base $B_2=(e'_1,e'_2)$ e il primo vettore della base $B_1=(e_1,e_2)$.

Esercizio 3

Data la conica di equazione

$$\mathscr{C}: \; x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0,$$

si costruisca un cambiamento di riferimento cartesiano in modo da portare l'equazione della conica in forma canonica.

La conica assegnata è quella determinata nell'esercizio 1 precedente: parabola.

L'asse ha equazione x+y-3=0 e il vertice è V=(5/4;7/4). Costruiamo una **roto-traslazione** di origine V e angolo - π/4 (= - 45°).

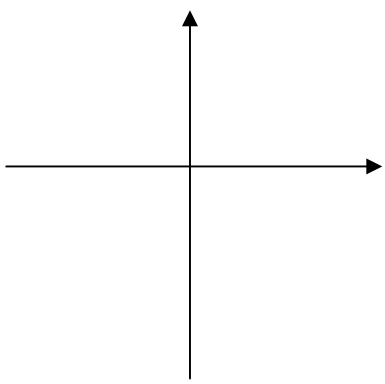
$$\begin{cases} x = x'\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + y' sen\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{5}{4} \\ y = -x' sen\left(-\frac{\pi}{4}\right) + y'\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{7}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{5}{4} \\ y = x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{7}{4} \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione della conica, svolgendo tutti i conti, si ottiene

$$2(x')^2 - 2\sqrt{2}\, y' = 0$$

da cui $\boxed{\mathscr{C}\colon y' = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(x')^2}$.



Esercizio 4

Data la conica di equazione

$$\mathscr{C}\text{:}\ \ 4x^2 - y^2 - 8x + 6y - 9 = 0,$$

si costruisca un cambiamento di riferimento cartesiano in modo da portare l'equazione della conica in forma canonica.

La conica assegnata è quella di un'iperbole.

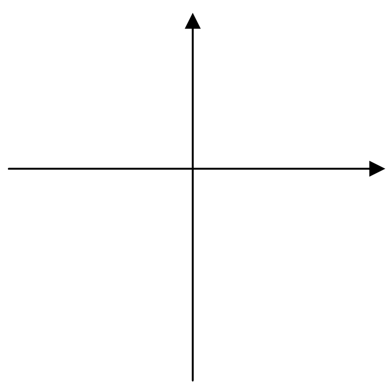
I suoi assi hanno equazione x-1=0 e y-3=0, il centro C=(1,3).

Costruiamo una **traslazione** di origine C(angolo 0= 0°).

$$\begin{cases} x = x'\cos 0 + y'\,sen 0 + 1 \\ y = -x'\,sen 0 + y'\cos 0 + 3 \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione della conica, svolgendo tutti i conti, si ottiene

$$4(x')^2-(y')^2=4$$



da cui la forma canonica:

$$\boxed{\mathscr{C}: \quad \frac{(x')^2}{1} - \frac{(y')^2}{4} = 1 \,.}$$

Esercizio 5

Data la conica di equazione

$$\mathscr{C}: \ 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4 = 0,$$

si costruisca un cambiamento di riferimento cartesiano in modo da portare l'equazione della conica in forma canonica.

L'equazione assegnata rappresenta un'ellisse reale.

Il centro della conica è O=(0,0) e gli assi hanno equazioni: x+y=0 e x-y=0.

Costruiamo un nuovo riferimento cartesiano di centro l'origine con una **rotazione** di -π/4= -45°.

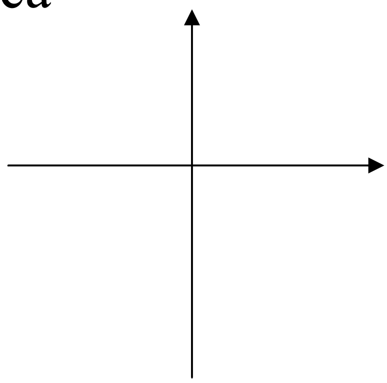
$$\begin{cases} x = x'\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + y' sen\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) \\ y = -x' sen\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + y'\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases} \quad O=O'$$

Sostituendo le equazioni di questa rotazione del riferimento cartesiano, si ottiene:

$$2(x')^2+8(y')^2 - 4=0$$

da cui la forma canonica

$$\boxed{\frac{(x')^2}{2}+\frac{(y')^2}{\frac{1}{2}}=1}.$$



Fuochi

Dati i punti ciclici $[(1,\pm i,0)]$, le rette uscenti da tali punti si dicono rette isotrope $y=\pm\ ix +a\pm ib$ dove $i=\sqrt{-1}$.

I fuochi sono i punti d'intersezione delle rette isotrope tangenti alla conica.

Ricerchiamo solo i fuochi reali:(-b,a).

Le polari dei fuochi si dicono direttrici.

Esercizio 6

Determinare i fuochi della conica dell'esercizio 4 precedente.

Le rette isotrope sono $y= ix +q$ e $y=-ix+q$ con $q=a+ib$. Mettiamo in sistema

$\mathscr{C}$: $4x^2 - y^2 - 8x +6y - 9 = 0$ con $y=ix+q$

ottenendo l'equazione:

$$4x^2 - (ix+q)^2 - 8x +6(ix+q) - 9 = 0$$

Svolgendo i conti, ricordando che $i^2=-1$ e ordinando secondo le potenze decrescenti di x:

$$5x^2+2x(-iq+3i-4)-q^2+5q-9=0 \ (\clubsuit)$$

Le rette isotrope **<u>devono essere tangenti</u>**: impongo all'eq. ($\clubsuit$) che <u>$\Delta/4=0$:</u>

$$(-iq+3i-4)^2-5(-q^2+5q-9)=0.$$

Svolgendo i conti e semplificando per 4 ottengo:

$$q^2+2q(i-3)-6i+12=0$$

equazione di 2° in q; determiniamo i valori di q:

$$\text{poichè } \Delta/4=(i-3)^2+6i-12=-4$$

$$q_{1,2}= 3-i \pm 2i.$$

Le rette isotrope tangenti sono:

$y=ix+3+i$ e $y=-ix+3-i$ con $y=ix+3-3i$ e $y=-ix+3+3i$.

I due fuochi reali hanno coordinate $(-b,a)$:

$$F_1=(-1,3) \text{ e } F_2=(3,3).$$