CONICHE in $\widetilde{\mathrm{A}}_2(\mathbb{C})$

Punti propri (x_P,y_P) hanno coordinate omogenee $[(x_P,y_P,1)]$,

Punti impropri hanno coordinate omogenee $[(l,m,0)]$.

L'equazione di una conica in coordinate non omogenee (x,y) $\mathscr{C}$: $a_{1,1}x^2 + 2a_{1,2}xy + a_{2,2}y^2 + 2a_{1,3}x + 2a_{2,3}y + a_{3,3} = 0$.

Equazione di una conica in coordinate omogenee (x_1,x_2,x_3)

$\mathscr{C}$: $a_{1,1}x_1^2 + 2a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,2}x_2^2 + 2a_{1,3}x_1x_3 + 2a_{2,3}x_2x_3 + a_{3,3}x_3^2 = 0$.

La matrice che rappresenta la conica è simmetrica:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Se **detA=0 conica degenere**;

se **detA≠0 conica GENERALE**.

Classificazione affine delle coniche generali:

attenzione detA*= - Δ

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Delta = a_{1,2}^2 - a_{1,1}.a_{2,2} > 0} & \textbf{iperbole} \\ \boldsymbol{\Delta = a_{1,2}^2 - a_{1,1}.a_{2,2} = 0} & \textbf{parabola} \\ \boldsymbol{\Delta = a_{1,2}^2 - a_{1,1}.a_{2,2} < 0} & \textbf{ellisse} \end{cases}$$

Retta polare di un punto P di coordinate omogenee (x_{1P}, x_{2P},x_{3P})

$$(x_{1P} \quad x_{2P} \quad x_{3P})\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Polari importanti:

a) Se P è un punto della conica, la retta polare è la tangente a $\mathcal{C}$;

b) Se P è un punto improprio la retta si chiama diametro;

c) Se P è uno dei due punti impropri dell'iperbole la retta polare è un asintoto.

Il centro è il punto d'intersezione dei diametri. L'iperbole e l'ellisse hanno un centro proprio (**coniche a centro**) la parabola ha per centro un punto improprio.

Gli assi sono diametri coniugati ortogonali.

Per iperbole ed ellisse le direzioni degli assi si possono ricavare dall'equazione il [(l,m)]:

$\boxed{a_{12}\, l^2 + (a_{22} - a_{11})lm - a_{12}m^2=0}$ e poi si calcolano le polari.

Per la parabola l'asse proprio si ricava:

$$\boxed{a_{11}(a_{11}\, x + a_{12}\, y + a_{13}) + a_{12}(a_{12}x+ a_{22}y + a_{23})=0}$$

I **vertici** sono i punti d'intersezione della conica con gli assi.

Esercizio 1

In $\widetilde{A}_2(\mathbb{C})$ si classifichi e studi la conica di equazione: $\mathscr{C}$: $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y = 0$.

La matrice della conica è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il determinante di A è nullo: conica degenere.

Essa rappresenta due rette nel piano; per determinarle considero l'equazione della conica di secondo grado rispetto a x e utilizzo la formula risolutiva: $x^2 + 2x(y-1) + y^2 - 2y = 0$

dove a=1, b=2(y-1) e c= $y^2 - 2y$

$$x = \frac{-b/2 \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a} = -(y-1) \pm \sqrt{(y-1)^2 - (y^2 - 2y)} = -(y-1) \pm \sqrt{1}$$

Dunque la conica di scompone in:

$\mathscr{C}$: (x+y)(x+y-2)=0

Esercizio 2

In $\widetilde{\mathrm{E}}_2(\mathbb{R})$ si classifichi la conica:

$$\mathscr{C}: x^2 + xy + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0.$$

a) Si determini il centro della conica;

b) Si determinino le equazioni degli assi della conica;

c) Si determini la retta tangente nel punto A=(2,0) appartenente alla conica.

La matrice della conica è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

detA=-1: **conica generale**.

$\Delta=(1/2)^2 - 1<0$ indica che la **conica è un'ellisse**.

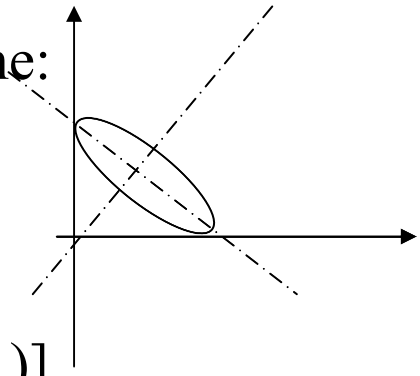
a) Il centro è il punto d'intersezione dei diametri: dalla matrice si ricava che due diametri sono:

$$d_1: x + \tfrac{1}{2} y - 2 = 0 \quad \text{ed} \quad d_2: \tfrac{1}{2} x + y - 2 = 0.$$

Risolvendo il sistema $d_1 \cap d_2$ si ottiene che il centro è

$$\boxed{C=(4/3;4/3)}$$

b) Per determinare gli assi, ricerchiamo le loro direzioni (l,m) risolvendo l'equazione:



$a_{12}\, l^2 + (a_{22} - a_{11})lm - a_{12}m^2=0$

$$l^2 - m^2 = 0$$

da cui si ottiene $l=\pm m$, ovvero $[(1,\pm 1)]$.

Un asse ha parametri direttori [(1,1)] e passa per (4/3;4/3): $\boxed{x - y = 0;}$

l'altro ha parametri direttori [(1,-1)] e passa per (4/3;4/3): $\boxed{3x+3y-8=0}$. (♣)

In alternativa calcolo la polare dei punti impropri (1,1,0) e (1,-1,0) ottenendo, per esempio, con il primo punto $3/2\, x + 3/2\, y - 4=0$ (eq. cart. equivalente a (♣)); analogamente per l'altra.

c) Per determinare la retta tangente calcolo la polare del punto (in coordinate omogenee) appartenente alla conica:

$$(2 \quad 0 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$\boxed{y = 0}$.

Esercizio 3

In $\widetilde{E}_2(\mathbb{R})$ si classifichi la conica:

$$\mathscr{C}: x^2 + 6xy + 9y^2 - 4x - 6y - 3 = 0.$$

a) Si determini il centro della conica;

b) Si determinino l'equazione dell'asse della conica;

c) Si determini il vertice e l'equazione della retta tangente in tale punto.

d) Si determini la retta tangente del punto A=(0,1) e la retta passante per B=(2,4) ortogonale a tale tangente.

La matrice della conica è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Il detA=-9 diverso da 0: **conica generale**,

mentre $\Delta=(3)^2 - 9=0$: la **conica è una parabola**.

a) Il centro è il punto d'intersezione dei diametri. Dalla matrice si ricava che due diametri sono:

d_1: x + 3 y-2=0 ed d_2: 3 x + 9y - 3 = 0.

Poiché le rette sono parallele, se ne deduce che il centro è il punto improprio che hanno in comune.

Ricordando che:

- la parabola ha tutti diametri paralleli;
- se la retta ha equazione ax+by+c=0 i parametri direttori sono (-b, a) e il punto improprio è proprio [(-b , a , 0)].

Il centro di questa parabola può essere scritto solo usando coordinate omogenee

$$\boxed{[(-3;1,0)]}$$

b) Per determinare l'asse della parabola usiamo la combinazione lineare dei diametri data dalla formula:

$$a_{11}(a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}) + a_{12}(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) = 0$$

$$1(x + 3\,y - 2) + 3(3\,x + 9y - 3) = 0.$$

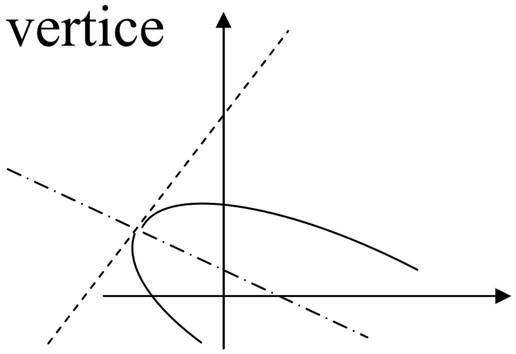
$$\boxed{10x + 30y - 11 = 0}$$

Attenzione: la retta polare di (-3,1,0) è la retta impropria $x_3=0$. L'asse è la polare di (1,3,0).

c) per determinare il vertice risolvo il sistema conica-asse:

$$\begin{cases} x^2 + 6xy + 9y^2 - 4x - 6y - 3 = 0 \\ 10x + 30y - 11 = 0 \end{cases}$$

Sostituendo nella conica $x=-3y+11/10$ si ottengono le coordinate del vertice



$$\boxed{V=(-399/200;619/600)}$$

Per determinare la retta tangente calcolo la retta polare:

$$\left(-\frac{399}{200} \quad \frac{619}{600} \quad 1\right)\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=0$$

ricavo l'equazione:

$$\boxed{\frac{180}{200}x - \frac{60}{200}y + \frac{421}{200}=0}$$

Oppure, in alternativa:

la retta tangente alla parabola nel vertice deve essere perpendicolare all'asse; le rette perpendicolari all'asse appartengono al fascio improprio di equazione:

$$3x - y + k = 0.$$

Imponendo il passaggio per il vertice si ottiene la medesima retta di equazione

$$3x - y + 421/60 = 0.$$

d) La retta tangente nel punto A=(0,1) si ottiene come:

$$(0 \quad 1 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

dunque ha equazione:

$$\boxed{t: x + 6y - 6 = 0}$$

le rette ortogonali appartengono al fascio di equazione

$$6x - y + k = 0$$

imponendo il passaggio per il punto (2,4) si ottiene

$$k = -8$$

$$\boxed{6x - y - 8 = 0}$$

Esercizio 4

In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si classifichi la conica:

$$\mathscr{C}: 2x^2 - 7xy + 3y^2 + 5x - 10y + 3 = 0.$$

a) nel caso sia riducibile si individuino le sue rette componenti;

b) Il punto (-8/5,-1/5) cosa rappresenta per la conica?

La matrice della conica è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{7}{2} & 3 & -5 \\ \frac{5}{2} & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Il detA=0: **conica riducibile**.

Per trovare le rette componenti si può cercare di scomporre il polinomio

$$\mathscr{C}: 2x^2 + x(5 - 7y) + 3y^2 - 10y + 3 = 0.$$

Ricordando la formula risolutiva di un'equazione di II grado e considerando (5-7y) come coefficiente di x e "termine noto" $3y^2 - 10y + 3$ si ottiene:

$$x = \frac{-(5-7y) \pm \sqrt{(5-7y)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (3y^2 - 10y + 3)}}{4}$$

$$x = \frac{-(5-7y) \pm \sqrt{25y^2 + 10y + 1}}{4}$$

Da cui si ottengono le due rette

$x=3y-1 \quad e \quad x=(y-3)/2.$

La conica si decompone in:

$$\mathscr{C}: \quad (x-3y+1)(2x-y+3) = 0$$

Il punto $P=(-8/5,-1/5)$ è il punto d'intersezione delle rette componenti la conica; P è coniugato di tutti i punti del piano (calcolando la polare di P si ottiene 0=0).

Esercizio 5

In $\widetilde{E}_2(\mathbb{R})$ si classifichi la conica:

$$\mathscr{C}: x^2 - 4xy + 3y^2 - 4x - 6y - 3 = 0.$$

a) Si determini il centro della conica;

b) Si determinino le equazioni degli assi della conica;

c) Si determinino le equazioni degli asintoti;

d) Si determinino il luogo dei punti che distano 3 dagli asintoti.

La matrice della conica è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Il detA=-42: **conica generale**,

$\Delta=(-2)^2 - 3>0$ indica che la **conica è un'iperbole**.

a) Il centro è il punto d'intersezione dei diametri: dalla matrice si ricavano:

$$d_1: x - 2y - 2 = 0 \quad \text{ed} \quad d_2: -2x + 3y - 3 = 0.$$

Se ne deduce che il centro è il punto d'intersezione:

$$\boxed{(-12,-7).}$$

b) Per determinare gli assi, ricerchiamo le loro direzioni (l,m) risolvendo l'equazione:

$$a_{12}\, l^2 + (a_{22} - a_{11})lm - a_{12}m^2 = 0$$

$$-2\, l^2 + (3-1)lm + 2m^2 = 0$$

$$l^2 - lm - m^2 = 0$$

$$l = \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 4m^2}}{2}$$

$$l = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} m$$

Dunque gli assi sono di equazione:

$$x - \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} y + k = 0$$

Imponendo il passaggio per il centro si trovano le due equazioni:

$$\boxed{x - \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} y + \frac{17 \mp 7\sqrt{5}}{2} = 0}$$

In alternativa si potevano sostituire i parametri direttori nella solita formula...

c) Per determinare gli asintoti ricavo i punti impropri della conica

$\mathscr{C}$: $x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_1x_3 - 6x_2x_3 - 3x_3^2 = 0$

retta impropria $x_3 = 0$

Si ottengono i punti impropri soluzione di

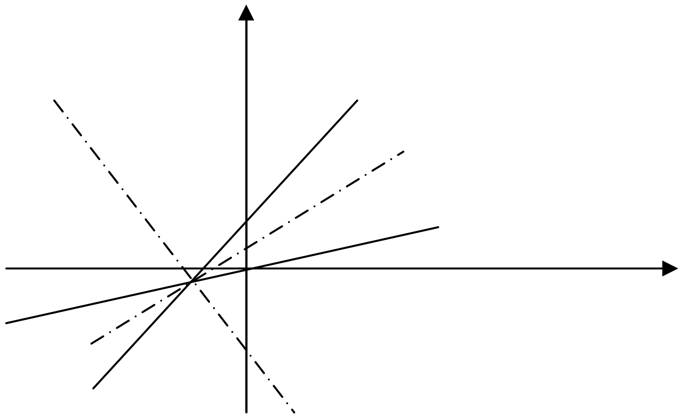
$$x_1^2 - 4x_1 x_2 + 3 x_2^2 = 0$$

$$(x_1 - 3 x_2)\ (x_1 - x_2) = 0$$

- $x_1 = 3x_2$ punto improprio $(3x_2, x_2, 0)$

  rappresentato da $[(3,1,0)]$ e
- $x_1 = x_2$ il punto improprio $(x_1, x_1, 0)$

  rappresentato da $[(1,1,0)]$.



Calcolando la tangente in tali punti si ottengono gli asintoti

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\boxed{x - 3y - 9 = 0 \quad \text{e} \quad -x + y - 5 = 0}$$

d) I punti P=(x;y) che distano 3 dagli asintoti appartengono alle quattro rette di equazioni:

$$\frac{|x-3y-9|}{\sqrt{10}}=3 \quad \Rightarrow \quad x-3y-9 \pm 3\sqrt{10}=0$$

$$\frac{|-x+y-5|}{\sqrt{2}}=3 \quad \Rightarrow \quad \text{x - y} + 5 \pm 3\sqrt{2}=0$$

Esercizi da svolgere in $\widetilde{\mathrm{E}}_2(\mathbb{C})$

1) Riconoscere le coniche e nel caso degeneri decomporle:

$\mathcal{C}$:$x^2+6xy+y^2-6x-4y+2=0$ iperbole ; $\mathcal{C}$:$x^2+y^2=0$ $(x+iy)(x-iy)=0$;

$\mathcal{C}$:$x^2+xy+y^2-4x-4y+4=0$ ellisse ; $\mathcal{C}$: $x^2+4xy+4y^2+2x+4y-3=0$

$(x+2y-1)(x+2y+3)$; $\mathcal{C}$: $x^2+4xy+4y^2-3x+2y-5=0$ (parabola) ;

$\mathcal{C}$: $x^2+2xy-3y^2-x-3y=0$ $(x+3y)(x-y-1)=0$

2) Si determinino le coordinate omogenee del centro della conica di equazione $\mathcal{C}$: $x^2+6xy+y^2-6x-4y+2=0$. [(3,7,8)]

3) Si determinino il centro della conica di equazione

$\mathcal{C}$: $2x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 6y - 9 = 0$ [(-5/2,-2)]

4) Si determinino le equazioni degli assi della conica

$\mathcal{C}$: $x^2 + 6xy + y^2 -6x -4y +2=0$. [$4x+4y-5=0, 2x-2y+1= 0$]

$\mathcal{C}$: $x^2-4xy+3y^2+4x+1=0$. [$x-3y+6=0$, $x-y-2=0$]