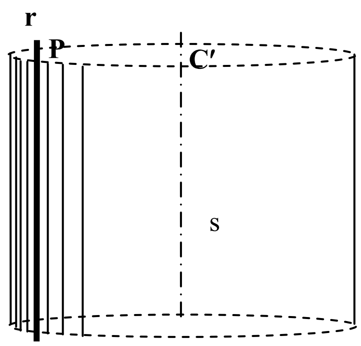
Superfici di rotazione

Proseguiamo gli esercizi iniziati venerdì 4-12-2009.

Esercizio 1

Si determini il luogo $\mathcal{S}$ generato dalla rotazione attorno alla retta s: x=t, y=0 z=t della retta r: x=t, y=1 e z=t. (cilindro)

Le rette s e r sono parallele:[(1,0,1)].



Un punto P della retta r è di coordinate P=(t,1,t) con t∈ℝ. Tale punto ruota su un piano ortogonale all'asse s di equazione x+z-2t=0.

Il centro C′ della circonferenza descritta da P è il punto d'intersezione tra il piano trovato e l'asse: C′=(t, 0,t).

Il raggio è la distanza PC′=1.

Al variare del parametro t le circonferenze hanno dunque equazione:

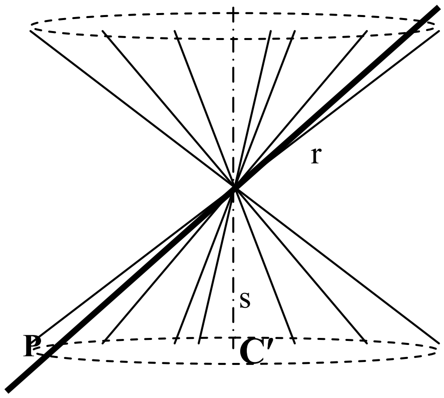
$$\gamma_t : \begin{cases} (x-t)^2 + (y-0)^2 + (z-t)^2 = 1 \\ x + z - 2t = 0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Al variare di t queste infinite circonferenze descrivono la superficie richiesta (cilindro); per ricavare un'equazione cartesiana basta eliminare il parametro t isolando t=1/2(x+z) dalla seconda equazione e sostituendolo nella prima:

$\mathcal{S}$: ……………..=0

Esercizio 2

Si determini un'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{L}$ ottenuta dalla rotazione della retta r: $y-z=0 \wedge z=0$ attorno alla retta s: $y-x=0 \wedge z=0$.



La retta s ha parametri direttori [(1,1,0)].

Un punto P della retta r è di coordinate P=(t,0,0) con t∈ℝ. Tale punto ruota su un piano ortogonale all'asse s di equazione x+y-t=0.

Il centro C′ della circonferenza descritta da P è il punto d'intersezione tra il piano trovato e l'asse: C′=(t/2, t/2,0).

Il raggio è la distanza PC′=$\sqrt{\frac{t^2}{2}}$.

Al variare del parametro t le circonferenze hanno dunque equazione:

$$\gamma_t : \begin{cases} \left(x-\frac{t}{2}\right)^2+\left(y-\frac{t}{2}\right)^2+(z-0)^2=\frac{t^2}{2} \\ x+y-t=0 \end{cases} \quad , \quad t\in\mathbb{R}$$

Al variare di t queste infinite circonferenze descrivono la superficie richiesta (cono); per ricavare un'equazione cartesiana basta eliminare il parametro t isolando t=x+y dalla seconda equazione e sostituendolo nella prima:

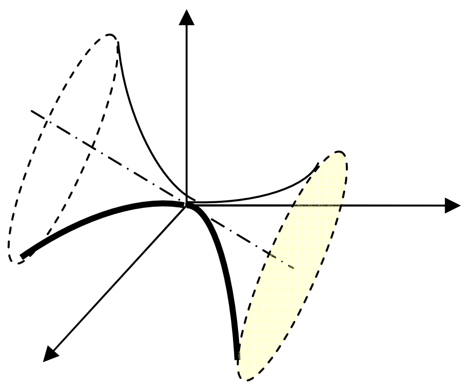
$$\mathcal{L}: \ldots\ldots\ldots\ldots=0$$

Esercizio 3

Tratto dal tema d'esame 06/02/2001

Si determini la superficie $\mathcal{Q}$ ottenuta dalla rotazione della curva $\mathcal{C}$: $x=y^2$ e $z=0$ attorno alla retta s:

$$s:\begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases} \qquad \lambda\in R.$$



La retta s ha parametri direttori [(1,0,1)].

Un punto P della curva $\mathcal{C}$ è di coordinate $P=(t^2,t,0)$ con $t\in\mathbb{R}$. Tale punto ruota su un piano ortogonale all'asse s di equazione $x+z-t^2=0$.

Il centro C′ della circonferenza descritta da P è il punto d'intersezione tra il piano trovato e l'asse: $C'=(t^2/2, 0, t^2/2)$.

Il raggio è la distanza $PC'=\sqrt{\dfrac{t^4}{2}+t^2}$.

Al variare del parametro t le circonferenze hanno dunque equazione:

$$\gamma_t : \begin{cases} \left(x-\dfrac{t^2}{2}\right)^2+(y-0)^2+\left(z-\dfrac{t^2}{2}\right)^2=\dfrac{t^4}{2}+t^2 \\ x+z-t^2=0 \end{cases} \qquad t\in R$$

Al variare di t queste infinite circonferenze descrivono la superficie richiesta; per ricavare un'equazione cartesiana basta eliminare il parametro t isolando $t^2=x+z$ dalla seconda equazione e sostituendolo nella prima:

$\mathcal{Q}$: ………………=0.

Esercizi da svolgere

1) Si determini il luogo S generato dalla rotazione attorno alla retta r: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ $t \in R$ della retta s: $\begin{cases} x = t \\ y = 2+t \\ z = t \end{cases}$ $t \in R$.

(cilindro)

2) Si determini il luogo S generato dalla rotazione attorno alla retta r: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ $t \in R$ della retta s: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$ $t \in R$.

(cono)

3) Si determini il luogo S generato dalla rotazione attorno alla retta r: $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases}$ $t \in R$ della retta s: $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$ $t \in R$.

(iperboloide)