Sfera in $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$

$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ $a,b,c,d\in R$ di centro e raggio

$$C=\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right) \qquad r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}$$

Oppure $\qquad (x-x_c)^2+(y-y_c)^2+(z-z_c)^2=r^2$

Esercizio 1

Determinare, se esiste,l'equazione della sfera passante per O=(0,0,0) , A=(-2,0,0), B=(0,6,0) e D=(-1,0,1).

Determinarne il centro e il raggio.

$\mathcal{S}: x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ $a,b,c,d\in R$

$$\begin{array}{l} O\in\mathcal{S}\Rightarrow \\ A\in\mathcal{S}\Rightarrow \\ B\in\mathcal{S}\Rightarrow \\ D\in\mathcal{S}\Rightarrow \end{array}\begin{cases} d=0 \\ 4-2a+d=0 \Rightarrow a=2 \\ 36+6b+d=0 \Rightarrow b=-6 \\ 1+1-a+c+d=0 \Rightarrow c=0 \end{cases}$$

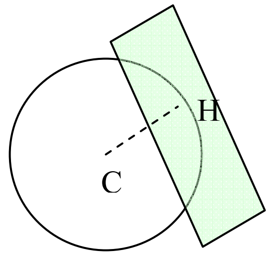
$\mathcal{S}: x^2+y^2+z^2+2x-6y=0$, sfera di $C=(-1,3,0)$ e $r=\sqrt{10}$.

Esercizio 2

Determinare l'equazione della sfera di centro C=(-1,0,2) e tangente al piano μ: $2x+3y+z-2=0$.

Allora il raggio è la distanza di C da μ

$$d(C,\mu)=\frac{|2.(-1)+2-2|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{14}}{7}$$



L'equazione della sfera è dunque:

$\mathcal{S}$: $(x+1)^2+(y-0)^2+(z-2)^2=2/7$

Esercizio 3

Determinare le equazioni delle sfere aventi centro sulla retta $x=0 \wedge z=3$ e tangenti ai piani di equazione $x+y+z=0$ e $x-y+z+2=0$.

Il centro ha coordinate da determinare $C=(0,t,3)$ e la sua distanza da entrambi i piani deve essere uguale:

$$\frac{|1.0+1.t+3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{|1.0-1.t+3+2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}$$ da cui $|t+3|=|-t+5|$

L'unica soluzione che si ottiene da $t+3=\pm(-t+5)$ è $t=1$

Il centro è quindi $C=(0,1,3)$ e il raggio è $4\sqrt{3}/3$.

L'equazione della sfera è:

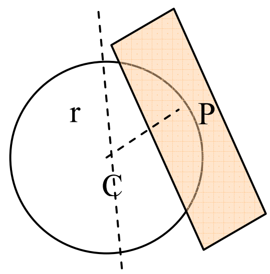
$\mathcal{S}$: …………………

Esercizio 4

Determinare, se esiste, l'equazione della sfera $\mathcal{S}$ con centro sulla retta r: x=y∧z=x tangente al piano π: 2x+y-z-8=0 nel punto P=(3,2,0). Determinare l'equazione del piano tangente in Q=(-1,0,2) a $\mathcal{S}$.

Il centro deve allora appartenere alla retta passante per P ortogonale al piano π; i suoi parametri direttori sono [(2,1,-1)] e le equazioni sono:

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-1}$$



Poiché questa retta è incidente la retta r, si trovano le coordinate del centro C=(1,1,1) intersecando la retta data con r. Calcolando la distanza di C dal piano π si trova il raggio d(C,P)=$\sqrt{6}$.

$\mathcal{S}$: ……………………...

Il punto Q appartiene alla sfera.

Il piano tangente per Q sarà ortogonale alla direzione C,Q di parametri direttori [(2,1,-1)]: ………………..

Esercizi da svolgere

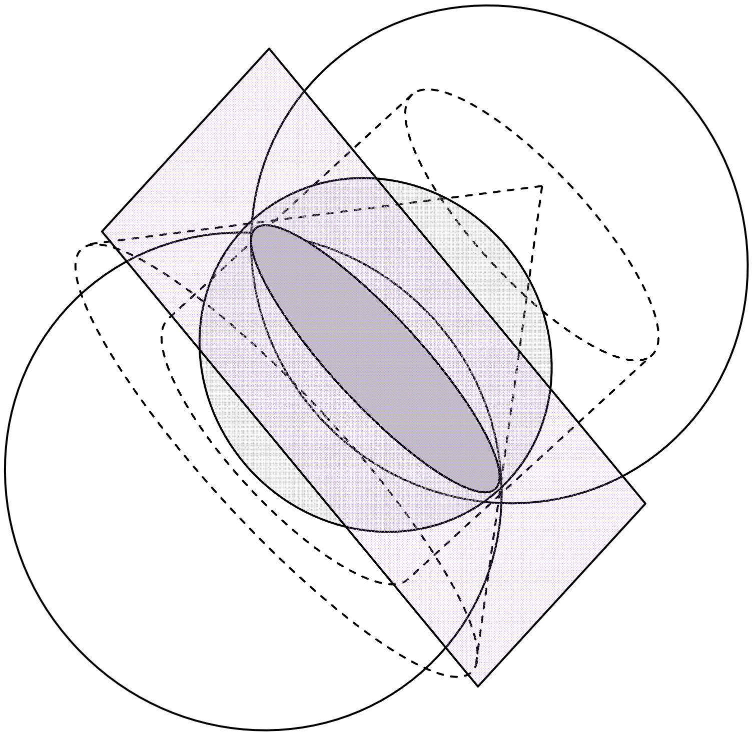
Determinare, se esistono, le equazioni delle sfere:

a) Passante per i punti $A=(1,1,1)$, $B=(3,3,1)$ e avente il centro sulla retta $x-y=1 \wedge z=5$. Determinare le equazioni dei piani tangenti in A e in B alla sfera trovata.

b) Tangente al piano $x=0$ in $A=(0,2,-3)$ e tangente a $x-y-z+1=0$ in $B=(2,1,2)$.

c) Determinare le equazioni delle sfere aventi centro sulla retta $y=1 \wedge z=x-1$ e tangenti ai piani di equazione $x+y+z=0$ e $x+y-z+2=0$.

Circonferenza in $E_3(\mathbb{R})$



La circonferenza può essere ottenuta come <u>sezione di una sfera con un piano</u>.

Non è l'unica sezione possibile.

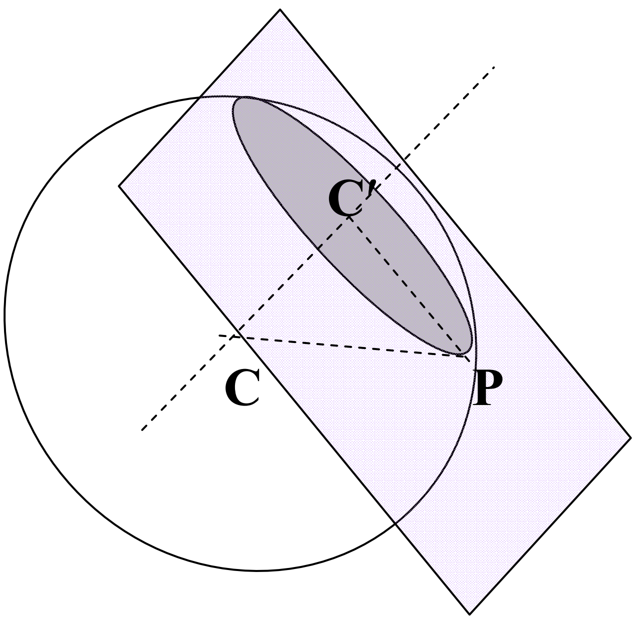
La stessa circonferenza è rappresentabile come intersezione tra **varie sfere** (con i centri appartenenti ad una medesima retta detta "retta dei centri") e **un unico piano.**

Quando potremo scegliere la sfera preferiremo considerare quella che ha il centro sul piano in modo tale che il centro della circonferenza coincida con il centro della sfera e così pure il raggio della sfera coincida con il raggio della circonferenza.

Assegnata una circonferenza, sezione tra sfera e piano, teniamo presente che:

- il centro della circonferenza è il punto d'intersezione tra il piano dato e la retta ortogonale al piano passante per il centro della sfera;
- il raggio della circonferenza (cateto) può essere ottenuto con il teorema di Pitagora applicato al triangolo C′CP dopo aver trovato il raggio della sfera (ipotenusa) e la distanza del centro della sfera dal piano (cateto).

Affinché la circonferenza sia reale: CP>CC′.



Esercizio 1

Determinare il centro e il raggio della circonferenza

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y = 0 \\ z = 1 \end{cases}.$$

Il centro della sfera è C=(1,1,0) e il raggio r=$\sqrt{2}$.

La distanza del centro C dal piano è 1: dunque la circonferenza è reale.

Il raggio della circonferenza misura 1.

Il piano z-1=0 ha coefficienti a=0, b=0, c=1 dunque una retta ortogonale ha parametri direttori [(0,0,1)]. La retta ortogonale al piano di γ passante per il centro è x-1=y-1=0.

Il centro della circonferenza si ottiene intersecando la retta x-1=y-1=0 con z-1=0: C′=(…,…,…).

Esercizio 2

Determinare il centro e il raggio della circonferenza

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4y + 1 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases}.$$

La sfera ha centro C=(1,-2,0) e raggio r=2, mentre la distanza del piano dal centro C è $3\sqrt{2}$: circonferenza non reale.

Esercizio 3

Determinare il centro, il raggio della circonferenza

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 6 = 0 \\ 2x + y - z - 9 = 0 \end{cases}$$

e l'equazione della retta tangente al punto P=(3,3,0) della circonferenza.

Il centro della sfera è C=(-1,3,-2) e il raggio è r=CP=$2\sqrt{5}$.

La distanza del centro dal piano è CC′=$\sqrt{6}$. Il raggio della circonferenza C′P= $\sqrt{14}$ (teorema di Pitagora applicato al triangolo C′CP).

La retta passante per C e ortogonale al piano ha equazione o: (x+1)/2=(y-3)/1=(z+2)/(-1).

Intersecando la retta o con il piano si ottengono le coordinate del centro della circonferenza C′=(1,4,-3).

Il piano tangente alla sfera nel punto P è ortogonale alla direzione di CP [(4,0,2)]: 4x+2z-12=0. La retta tangente è l'intersezione tra il piano tangente e il piano che contiene la curva γ:

$$t:\begin{cases} 4x + 2z - 12 = 0 \\ 2x + y - z - 9 = 0 \end{cases}.$$

Esercizio 4

Determinare le equazioni cartesiane della circonferenza, se esiste, passante per i punti A=(1,2,0), B=(0,1,0), e D=(4,0,-1).

Il piano che contiene i tre punti si ottiene imponendo

$$\det\begin{pmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_D-x_A & y_D-y_A & z_D-z_A \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ 0-1 & 1-2 & 0-0 \\ 4-1 & 0-2 & -1-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

nullo: π: x-y+5z+1=0.

Il centro della circonferenza deve essere equidistante da A, B e D e deve appartenere al piano π. A tal fine determiniamo due dei tre piani assiali del triangolo ABD.

Piano assiale di

α_{AB}: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-0)^2=(x-0)^2+(y-1)^2+(z-0)^2$

Facendo i conti α_{AB}: $x+y-2=0$

Piano assiale di

α_{BD}: $(x-4)^2+(y-0)^2+(z+1)^2=(x-0)^2+(y-1)^2+(z-0)^2$

Facendo i conti α_{BD}: $4x-y-z-8=0$.

Allora le coordinate del centro della circonferenza si ottengono risolvendo:

$$\begin{cases} x-y+5z+1=0 \\ x+y-2=0 \\ 4x-y-z-8=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{17}{9} \\ y=\dfrac{1}{9} \\ z=-\dfrac{5}{9} \end{cases}$$

Il raggio è dato dalla distanza centro punto A (o B, o D): $\frac{\sqrt{42}}{3}$. Valgono le considerazioni fatte all'inizio della lezione, potendo scegliere la sfera da sezionare:

$$\gamma:\begin{cases}\left(x-\frac{17}{9}\right)^2+\left(y-\frac{1}{9}\right)^2+\left(z+\frac{5}{9}\right)^2=\frac{42}{9}\\ x-y+5z+1=0\end{cases}$$

Esercizio 5

Determinare le equazioni cartesiane della circonferenza γ, se esiste, che ha centro sulla retta r: x-y+1=z-x=0 ortogonale al piano che la contiene e passante per il punto A=(2,-1,3). Si determini l'equazione della retta tangente in A a γ.

Il piano della circonferenza è ortogonale a r e passa per A: sapendo che i parametri direttori di r sono [(1,1,1,)], il piano risulta di equazione x+y+z-4=0.

Il centro della circonferenza è dato dall'intersezione tra r e il piano π: C=(1,2,1). Il raggio della circonferenza è pari alla distanza di C da A: $\sqrt{14}$.

Allora tra tutte le sfere scegliamo quella con centro sul piano π. La sfera risulta di equazioni:

$$\gamma : \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 14 \\ x + y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

Determino i parametri della direzione di AC:

[(1,-3,2)].

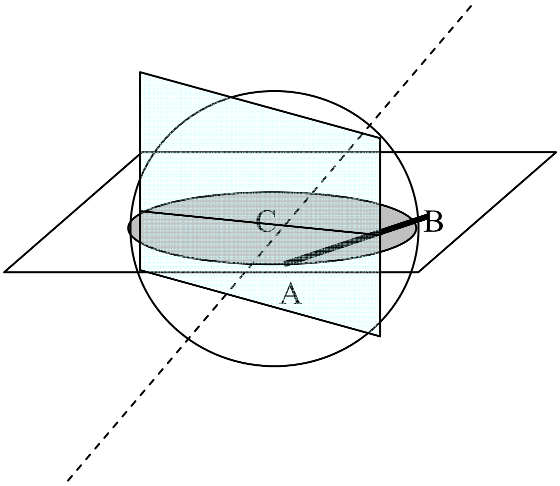
Il piano per A tangente alla sfera risulta di equazione x-3y+2z-11=0. La retta t tangente è quindi l'intersezione tra il piano di γ e il piano tangente:

$$t : \begin{cases} .... = 0 \\ .... = 0 \end{cases} .$$

Esercizio 6

Determinare le equazioni cartesiane della circonferenza γ passante per il punto A=(-1,-1,-2), B=(-1,-3,2) che ha centro sulla retta r:x-1=y-z+1=0 (non necessariamente ortogonale al piano che la contiene).

Il centro della circonferenza appartiene anche al piano assiale del segmento AB:



α_{AB} : $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=(x+1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2$

Svolgendo tutti i calcoli si ottiene:

α_{AB} : y-2z+2=0.

Troviamo le coordinate del centro della circonferenza risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x-1=0 \\ y-z+1=0 \\ y-2z+2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{x}=1 \\ \mathrm{y}=0 \\ \mathrm{z}=1 \end{cases}$$

Il raggio è la distanza di C′=(1,0,1) da A (oppure B)

C′A=$\sqrt{14}$.

Determiniamo l’equazione del piano che contiene A, B e C′:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ -1-1 & -1-0 & -2-1 \\ -1-1 & -3-0 & 2-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ -2 & -1 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -10x+8y+4z+6$$

$$\pi : 5x-4y-2z-3=0$$

Potendo scegliere la sfera, costruisco l'equazione della sfera che ha centro coincidente con il centro della circonferenza:

$$\gamma : \begin{cases} (x-1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=14 \\ 5x-4y-2z-3=0 \end{cases}$$

Luogo geometrico in $E_3(\mathbb{R})$ ottenuto mediante rotazione di punti attorno ad una retta (asse)

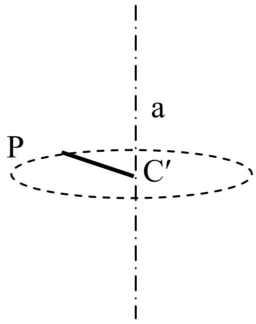
Esercizio 1

Si determinino le equazioni cartesiane del luogo geometrico $\mathcal{L}$ decritto dal punto P=(-1,-2,3) attorno alla retta a: $\begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$.

La rotazione del punto P avviene sul piano ortogonale all'asse a di rotazione: poiché i parametri direttori di a sono [(0,0,1)], il piano π ha equazione z=3.

Allora il centro della circonferenza generata dalla rotazione di P si ottiene come soluzione del sistema

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{(asse} \cap \text{piano)} \Rightarrow C'=(0,3,3).$$



Il raggio è la distanza C′P=$\sqrt{26}$.

Individuo la circonferenza come intersezione tra il piano π e la sfera che ha centro coincidente con il centro della circonferenza:

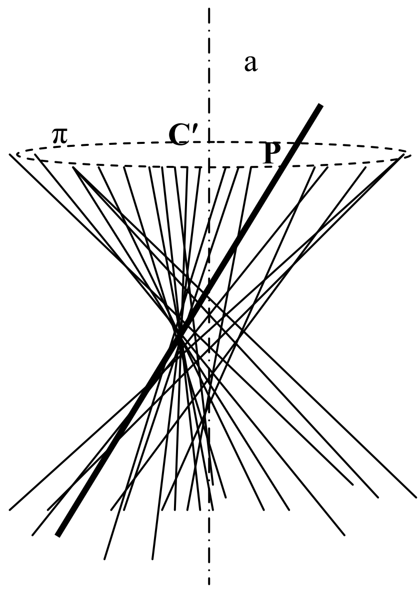
$$L : \begin{cases} \text{.....................................} = \text{........} \\ \text{............} = 0 \end{cases}.$$

Esercizio 2

Si determini un'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{L}$ ottenuta dalla rotazione della retta r: $\begin{cases} z = 1 \\ x = y \end{cases}$

attorno alla retta a: $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$.

I parametri direttori di a sono [(2,-1,0)].



Un punto P della retta è di coordinate P=(t,t,1) con t∈R. Tale punto ruota su un piano ortogonale all'asse a: 2x-y-t=0 (piano π).

Il centro C′ della circonferenza descritta da P è il punto d'intersezione tra il piano trovato e l'asse: C′=(2/5 t , -1/5 t , 0).

Il raggio è la distanza PC′=$\sqrt{\frac{9}{5}t^2+1}$.

Al variare del parametro t le circonferenze hanno dunque equazione:

$$\gamma_t : \begin{cases} \left(x - \frac{2}{5}t\right)^2 + \left(y + \frac{1}{5}t\right)^2 + (z)^2 = \frac{9}{5}t^2 + 1 \\ 2x - y - t = 0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Al variare di t, queste infinite circonferenze descrivono la superficie richiesta (iperboloide); per ricavare un'equazione cartesiana basta eliminare il parametro t isolando t=2x-y dalla seconda equazione e sostituendolo nella prima:

$\mathcal{L}$: ……………….=0.