Esercizio 1 (tipo tema d'esame)

Si considerino le rette:

$$r:\begin{cases} kx-8z=k \\ y=1 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x-2kz=0 \\ y+(2-k)z=0 \end{cases}$$

1) Si dica per quali valori del parametro reale k le rette r e s risultano sghembe, parallele o incidenti.

2) Nel caso parallele si determino i parametri direttori comuni di r ed s e un'equazione cartesiana del piano che le contiene entrambe.

3) Nel caso incidenti si determinino le coordinate del punto comune e un'equazione cartesiana del piano che le contiene.

4) Nel caso k=0 si determini la retta di minima distanza (retta incidente e ortogonale ad entrambe le rette sghembe).

5) Nel caso k=1 si determini un'equazione cartesiana di un piano parallelo ad r e s passante per Q=(2,1,0).

1) Il determinante della matrice dei coefficienti dei piani che individuano le rette r ed s è:

$$\det\begin{pmatrix} k & 0 & -8 & k \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2k & 0 \\ 0 & 1 & 2-k & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} k & 0 & -8 & k-0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-1 \\ 1 & 0 & -2k & 0-0 \\ 0 & 1 & 2-k & 0-1 \end{pmatrix} =$$

$$\det\begin{pmatrix} k & 0 & -8 & k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2k & 0 \\ 0 & 1 & 2-k & -1 \end{pmatrix} = (-1)^{2+2}\det\begin{pmatrix} k & -8 & k \\ 1 & -2k & 0 \\ 0 & 2-k & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= 2k^2 + 2k - k^2 - 8 = ...$$

Dunque, poiché le rette risultano sghembe **se e solo** se il determinante risulta diverso da 0, la risposta alla prima parte della domanda è per**: k≠ … ∧ k≠….**

Per k= … le matrici del sistema che rappresenta r∩s diventano:

$$r\begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} = 3$$

dunque le rette r ed s sono incidenti.

Per k=… le matrici del sistema che rappresenta r∩s diventano:

$$r\begin{pmatrix} 2 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \qquad r\begin{pmatrix} 2 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

dunque r ed s sono parallele e distinte.

Sghembe per k≠ … ∧ k≠ ….
Parallele per k=…,
Incidenti per k=…

2) per k=2 le rette diventano di equazioni:

$$r:\begin{cases} 2x-8z=2 \\ y=1 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x-4z=0 \\ y=0 \end{cases}$$

i parametri direttori delle rette parallele sono proporzionali a:

$$\rho\left(\det\begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \rho(8,0,2) = \varphi(4,0,1)$$

$$\varphi\left(\det\begin{pmatrix}0 & -4\\ 1 & 0\end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix}1 & -4\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \varphi(4,0,1)$$

Ora il piano richiesto è uno dei piani del fascio proprio di piani di asse r passante per un punto di s:

$$F_1 : \alpha(2x - 8z - 2) + \beta(y - 1) = 0 \qquad (\alpha, \beta) \in \mathrm{R}^2 - \{(0,0)\}$$

E' evidente che s passa per l'origine O=(0,0,0)∈s; imponendo il passaggio per l'origine si ottiene -2α-β=0 cioè β=-2α. Sostituendo, semplificando, si ottiene ……. =0.

[(…,…,…)]	……………=0

3) Ponendo **k=-4** le equazioni delle rette diventano:

$$r : \begin{cases} -4x - 8z = -4 \\ y = 1 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + 8z = 0 \\ y + 6z = 0 \end{cases}$$

Il sistema che rappresenta r∩s è determinato:

$$\begin{cases} -4x - 8z = -4 \\ y = 1 \\ x + 8z = 0 \\ y + 6z = 0 \end{cases}$$

ed ammette una sola soluzione: x= …, y=…, z = …

P=(… , … , …)

Procedendo come nel quesito precedente, tenendo presente che -4x-8z+4=0 è equivalente a x+2z-1=0

$$F_2 : \alpha(x+2z-1)+\beta(y-1)=0 \qquad (\alpha,\beta)\in \mathrm{R}^2-\{(0,0)\}$$

pongo il passaggio per O=(0,0,0) ottenendo -α -β =0.

Sostituendo in F_2 e dividendo si ottiene …………..=0

P=(…. , …. , …)	…………… =0

4) Per **k = 0** le rette sono sghembe:

$$r:\begin{cases}-8z=0\\ y=1\end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{r}:\begin{cases}z=0\\ y=1\end{cases} \qquad s:\begin{cases}x=0\\ y+2z=0\end{cases}$$

4.1. I parametri direttori di r sono [(1,0,0)]

I parametri direttori di s sono [(0,-2,1)]

4.2. I parametri direttori di una retta [(l,m,n)] ortogonale ad entrambe devono soddisfare:

$$\begin{cases}(l,m,n)\circ(1,0,0)=0\\ (l,m,n)\circ(0,-2,1)=0\end{cases} \qquad \begin{cases}l=0\\ -2m+n=0\end{cases} \Rightarrow \ (0,\mathrm{m},2\mathrm{m})$$

4.3. La retta di minima distanza deve dunque avere questi parametri ed essere incidente ad r.

Considero $\alpha z+ \beta(y-1)=0$ (fascio di piani di asse r)

e impongo la condizione parallelismo retta - piano:

$0+ \beta + 2\alpha=0$. Si ottiene $\boxed{\ldots\ldots\ldots=0}$.

4.4. La retta di minima distanza deve essere incidente anche ad s:

Considero $\alpha x+\beta(y+2z)=0$ (fascio di piani di asse s)

e impongo la condizione parallelismo retta-piano:

$0+ \beta + 4\beta=0$, si ottiene $\boxed{\ldots\ldots\ldots=0}$.

retta di minima distanza $\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \end{cases}$

5) Ponendo k=1 le rette sghembe hanno equazioni:

$$r:\begin{cases} x-8z=1 \\ y=1 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x-2z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

e i parametri direttori di r sono [(8,0,1)]

di s sono [(2, -1, 1)]

un piano ax+by+cz+d=0

parallelo a r : 8.a+1.c=0

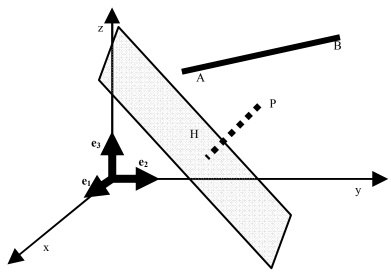
parallelo a s: 2.a-1.b+1.c=0

passante per (2,1,0): 2.a+1.b+d=0

Risolvendo il sistema si trova:

c=-8 a , b= -6 a , d= 4 a.

Dunque le equazioni sono: ………….=0. Dividendo per a: $\boxed{\sigma : \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0}$



Distanza tra punti: $A=(x_A,y_A,z_A)$ e $B=(x_B,y_B,z_B)$

$$d(A,B)=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2}$$

Distanza punto-piano $P=(x_P,y_P,z_P)$ e π:ax+by+c+d=0

$$d(P,\pi)=d(P,H)=\frac{\left|ax_P+by_p+cz_p+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Coseni degli angoli formati tra direzioni di parametri direttori $[(l_1,m_1,n_1)]$ e $[(l_2,m_2,n_2)]$.

$$\cos\alpha=\pm\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1{}^2+m_1{}^2+n_1{}^2}\sqrt{l_2{}^2+m_2{}^2+n_2{}^2}}$$

Esercizio 2

Determinare il luogo dei punti di $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$ che distano 3 dal punto C=(-1,-2,3).

I punti richiesti hanno coordinate P=(x,y,z) tali che d(P,C)=3: utilizzando la formula

$$\sqrt{(x-x_C)^2+(y-y_C)^2+(z-z_C)^2} = 3$$

Elevando al quadrato otteniamo l'equazione di una sfera $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$

$$\mathcal{S}: x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z+5=0.$$

Esercizio 3

Determinare il luogo dei punti di $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$ che distano 3 dal piano π: 2x+4y-z+3=0.

I punti richiesti hanno coordinate P=(x,y,z) tali che d(P, π)=3: utilizzando la formula

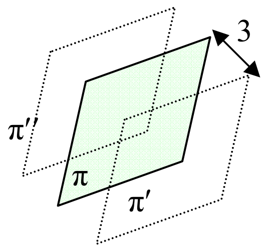
$$\frac{|ax_P + by_p + cz_p + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 3$$

si ottiene l'equazione con modulo:

$$\frac{|2x+4y-z+3|}{\sqrt{2^2+4^2+(-1)^2}}=3$$

equivalente a $|2x+4y-z+3|=3\sqrt{21}$ da cui si ottengono le equazioni di due piani paralleli a π:

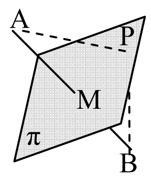
$\pi': 2x+4y-z+3-3\sqrt{21}=0$ e $\pi'': 2x+4y-z+3+3\sqrt{21}=0$.



Esercizio 4

Determinare il luogo dei punti di $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$ equidistanti dai punti A=(1,2,-1) e B=(0,-1,3).

Si tratta del piano π assiale del segmento AB.



Per determinare l'equazione di tale piano è possibile procedere in due modi:

π è ortogonale alla direzione per A, B [(1,3,- 4)] e passa per il punto medio M=(½,½,1). Il piano appartiene quindi al fascio di piani x+3y-4z+k=0 e imponendo il passaggio per M si ottiene:

$$\pi : x+3y-4z+2=0.$$

Oppure il piano è il luogo dei punti P=(x,y,z) equidistanti da A e B

$$\sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2} = \sqrt{(x-x_B)^2+(y-y_B)^2+(z-z_B)^2}$$

elevando al quadrato e sviluppando i conti si ottiene:

$$2x(x_B-x_A)+2y(y_B-y_A)+2z(z_B-z_A)+x_A^2+y_A^2+z_A^2-x_B^2-y_B^2-z_B^2=0$$

Nel caso proposto: A=(1,2,-1) e B=(0,-1,3).

$$2x(0-1)+2y(-1-2)+2z(3+1)+1+4+1-0-1-9=0$$

cambiando i segni e dividendo per 2 si ottiene l'equazione $\pi : x+3y-4z+2=0$.

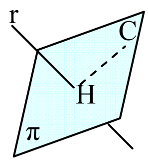
FORMULA PIANO ASSIALE

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2 = (x-x_B)^2+(y-y_B)^2+(z-z_B)^2$$

Esercizio 6

Determinare la distanza del punto C=(-1,-2,3) dalla retta $r: \begin{cases} x+y=1 \\ z+y=3 \end{cases}$.

Non esiste una formula elementare per calcolare la distanza di un punto da una retta nello spazio. Per determinare tale misura si può calcolare la distanza tra C e il punto d'intersezione tra la retta r e il piano passante per C ortogonale a r.



I parametri direttori di r sono [(1,-1,1)],

il piano ortogonale a r ha equazione: x-y+z+k=0,

passando per C: π: x-y+z-4=0,

il punto H d'intersezione tra r e π è H=(1,0,3)

la distanza richiesta d(C,r)=d(C,H)= $2\sqrt{2}$.

Esercizio 7

Determinare la distanza tra i due piani paralleli

$\pi': 3x+2y-z+4=0$ e $\pi'': 6x+4y-2z+3=0$.

Ha senso chiedere la distanza solo tra piani **paralleli** e **distinti** perché qualsiasi sia il punto preso su un piano, la distanza di tale punto dall'altro piano sarà costante.

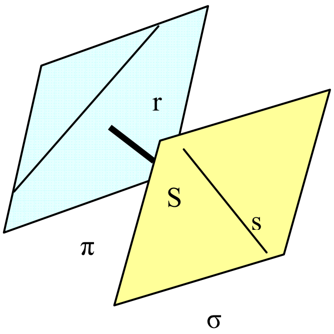
Sia P=(0,0,4)$\in \pi'$, la sua distanza da π'' è:

$$d(\pi',\pi'') = d(P,\pi'') = \frac{|6.0+4.0-2.4+3|}{\sqrt{6^2+4^2+(-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{56}} = \frac{5\sqrt{14}}{28}$$

Esercizio 8

Determinare la distanza minima tra le rette sghembe

$$\mathrm{r}:\begin{cases} \mathrm{y}+5\mathrm{x}-3=0 \\ \mathrm{z}+3=0 \end{cases} \quad \mathrm{s}:\begin{cases} x+1=0 \\ y-2=0 \end{cases}.$$



È sufficiente calcolare la distanza tra i due piani paralleli che contengono le rette r e s. A tal fine è sufficiente trovare l'equazione del piano che contiene r parallelo a s di parametri direttori [(0,0,1)] e determinare la sua distanza da un punto S appartenente a s. Nel fascio proprio di piani di asse r:

F(r): $\alpha(5x+y-3)+\beta(z+3)=0 \qquad (\alpha,\beta)\neq(0,0)$

Ricerco il piano parallelo a s: β=0 ⇒ π: 5x+y-3=0.

Sia S=(-1,2,0) un punto di s:

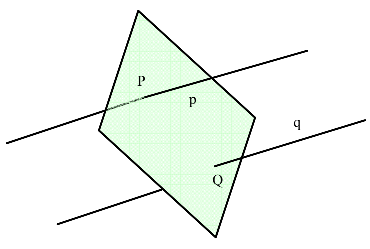
$$d(r,s) = d(\pi, S) = \frac{|5.(-1)+2-3|}{\sqrt{5^2+1^2+0^2}} = ...$$

Esercizio 9

Determinare la distanza tra le rette parallele

$$p: \begin{cases} y+5x=0 \\ z+3=0 \end{cases} \quad q: \begin{cases} 5x+y+2z+26=0 \\ z=0 \end{cases}.$$

Dopo aver determinato l'equazione di un piano ortogonale alle rette p e q troveremo la distanza tra le rette come distanza tra i rispettivi punti d'intersezione con tale piano.



I parametri direttori delle rette p e q sono [(1,-5,0)]. Fisso il punto P=(0,0,-3)∈p: determino il piano ortogonale a p (x-5y+k=0) passante per P: x-5y=0.

Interseco tale piano con q ottenendo Q=(-5,-1,0).

$$d(p,q)=d(P,Q)=\sqrt{35}$$

Esercizio 10

Determinare il luogo dei punti di $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$ che distano 3 dalla retta r di equazione $r:\begin{cases} x=1 \\ z=3 \end{cases}$.

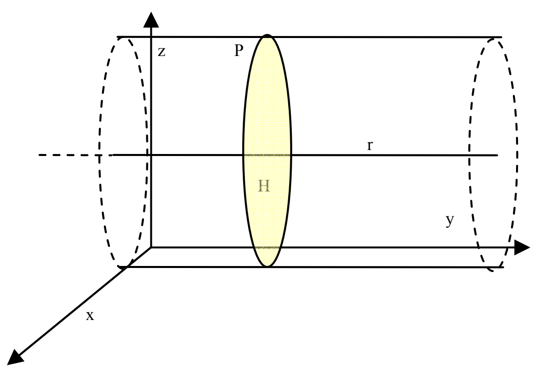
Come già fatto nell'esercizio 6 sia P=(x,y,z) un punto generico allora il punto H=(1,y,3) (intersezione tra il piano ortogonale a r passante per P e la retta r); la distanza tra P e H deve essere 3

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-y)^2+(z-3)^2}=3$$

Elevando al quadrato si ottiene la seguente equazione:

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0 \quad \text{con } y\in R$$

(la superficie rappresentata dall'equazione è un cilindro)



Esercizio 10

Si determinino le equazioni delle rette passanti per A=(1,0,3) parallele al piano μ: 2x+y+z-1=0 che formano con l'asse x e l'asse z angoli uguali.

Le rette r avranno parametri direttori [(l,m,n)] e dovranno risultare parallele al piano μ: 2.l+m+n=0 (a).

Inoltre, sapendo che l'asse delle x ha p. dir. [(1,0,0)] e l'asse delle z ha p. dir. [(0,0,1)], la richiesta che abbiano angoli uguali si traduce nella richiesta che abbiano coseni uguali tra le direzioni:

$$\cos(r,x)=\pm\frac{l.1+m.0+n.0}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{1^2+0^2+0^2}} \qquad \cos(r,z)=\pm\frac{l.0+m.0+n.1}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{0^2+0^2+1^2}}$$

Imponendo l'uguaglianza si ottiene $l=\pm n$ (b).

Considerando le condizioni (a) e (b) otteniamo due casi $(l,-3l,l)$, $(l,-l,-l)$ da cui:[(1,-3,1)] e [(1,-1,-1)].

Le rette hanno equazioni parametriche:

……….