Esercizio 1

Date le rette $r_1 : \begin{cases} x + y = -1 \\ 2x + 3z = 1 \end{cases}$ $\quad r_2 : \begin{cases} 3x + 3z = 2 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$

a) Scrivere le equazioni parametriche delle rette r_1 e r_2.

b) Dopo aver verificato che le rette r_1 ed r_2 sono sghembe, trovare l'equazione di un piano σ contenente r_1 e parallelo a r_2.

c) Determinare le equazioni di una retta incidente r_1 e r_2 e passante per O=(0,0,0).

Svolgimento

a) Una rappresentazione parametrica è:

$$r_1 : \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathrm{R} \qquad r_2 : \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} - 1\mu \\ y = -\dfrac{1}{3} - 1\mu \\ z = 0 + 1\mu \end{cases} \quad \mu \in \mathrm{R}$$

b) le rette sono sghembe perché il rango di A è 3.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

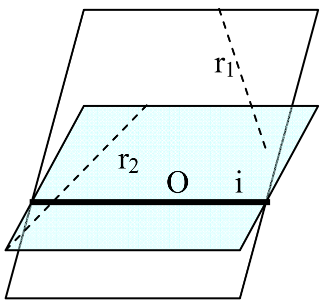
Il piano richiesto appartiene al fascio di piani di asse r_1 ed è parallelo a r_2:

$\mathcal{F}(r_1)$: $\lambda(x+y+1)+\mu(2x+3z-1)=0 \quad (\lambda,\mu)\neq(0,0)\in\mathbb{R}^2$

Imponendo la condizione di parallelismo con la retta r_2 di parametri direttori [(-1,-1,1)] si ottiene:

$(\lambda+2\mu).(-1)+(\lambda)(-1)+(3\mu).1=0 \Rightarrow$ ……. e l'equazione del piano che si ottiene è: ……….

c) una retta incidente r_1 passante per O può essere vista come intersezione tra due piani entrambi passanti per O. Il primo piano del fascio proprio



$\mathcal{F}(r_1)$: $\lambda(x+y+1)+\mu(2x+3z-1)=0 \quad (\lambda,\mu)\neq(0,0)\in\mathbb{R}^2$

passante per O $\Rightarrow$ …. . Il piano è: …..=0. L'altro piano del fascio proprio

$\mathcal{F}(r_2)$: $\lambda(3x+3z-2)+\mu(x+2y+3z)=0$ $(\lambda,\mu)\neq(0,0)\in\mathbb{R}^2$

passante per O $\Rightarrow$ λ=…. . Il piano è: ……..=0.

La retta così trovata non è parallela né a r_1 né a r_2. Dunque:

$$i:\begin{cases}\dots\\ \dots\end{cases}$$ è la retta richiesta.

Esercizi da svolgere: determinare, se esistono,

1) le equazioni della retta parallela ai piani π: $x+y+z=0$, φ: $2x-y+3z+3=0$ passante per $A=(0,0,-2)$;

2) l'equazione del piano contenente la retta r: $\begin{cases}x+2y+z=0\\ 3x-z+1=0\end{cases}$ parallelo alla retta s: $\begin{cases}x+z-4=0\\ 2x-y+1=0\end{cases}$;

3) l'equazione del piano contenente la retta r (es.2) e parallelo al piano γ: $x+2y+2z+5=0$.

Esercizio 2 (tema d'esame senza parametri)

Si considerino i piani i

$\sigma_1 : x+5y+z-13=0, \quad \sigma_2 : 3x+5y-2z+4=0.$

a) Determinare l'equazione di un piano ortogonale a σ_1 e passante per i punti A=(1,1,0) e B=(0,0,3).

b) Determinare le equazioni della retta s parallela sia a σ_1 e σ_2 passante per O=(0,0,0).

c) Determinare l'equazione del π piano perpendicolare a s passante per C=(-1,-2,0).

d) Determinare i parametri direttori di una retta ortogonale sia a $\sigma_1 \cap \sigma_2$ e parallela a σ_1 .

Svolgimento:

a) Un piano d'equazione ax+by+cz+d=0 $(a,b,c)\neq(0,0,0)$

ortogonale a σ_1: a.1+b.5+c.1=0;

passante per A: a.1+b.1+c.0+d=0

passante per B: a.0+b.0+c.3+d=0. Risolvo il sistema:

…

Dunque le equazioni del piano sono:

$4cx-cy+cz-3c=0 \quad c\neq 0$ allora una è $4x-y+z-3=0$.

b) Utilizzando i fasci di piani paralleli a σ_1 e σ_2 e imponendo il passaggio per $O=(0,0,0)$ otteniamo $\alpha_1: x+5y+z=0, \quad \alpha_2: 3x+5y-2z=0$. Allora la retta s ha equazioni: ….

c) I parametri direttori della retta s sono [(3,-1,2)] e il piano π perpendicolare a s deve aver coefficienti a,b,c proporzionali ai parametri direttori: $3x-y+2z+d=0$. Imponendo il passaggio per $C=(-1,-2,0)$: $d=1$.

π: …………..=0.

d) La classe [(l,m,n)] richiesta deve verificare la condizione di ortogonalità con $\sigma_1 \cap \sigma_2$ di parametri [(3,-1,2)] (parallela a s) $3.\ell+(-1).m+2.n=0$. Inoltre deve esser parallela a σ_1: $1.\ell+5.m+1.n=0$. Risolvendo …

Esercizio 3 (tema d'esame con parametro k)

Si considerino le rette

$$r_1 : \begin{cases} x - 5y + 2z = 4 \\ 3x + 4y - z = 2 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x - y + kz = 6 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

a) Scrivere l'equazione del fascio di piani ortogonali a r_1;

b) per quali valori di k esiste un piano ortogonale a r_1 e parallelo a r_2;

c) Per quali valori di k esiste un piano parallelo sia a r_1 che a r_2 e ortogonale al piano σ: x-y=15. Che piani si ottengono?

Svolgimento

a) i parametri direttori delle retta r_1 sono [(-3,7,19)]. Per la condizione di ortogonalità i coefficienti di x,y,z nell'equazione del piano devono essere proporzionali ai parametri direttori:

$$\mathcal{F}: -3x+7y+19z+h=0 \text{ con } h\in\mathbb{R}.$$

b) i parametri direttori di r_2 sono [(-2k,k,3)]. Un piano che soddisfi le richieste dovrà appartenere al fascio $\mathcal{F}$ ed essere parallelo a r_2 :

$$al+bm+cn=0$$

…

.

c) un piano α : ax + by + cz + d = 0 risulterà parallelo a r_1 : $al+bm+cn=0 \Rightarrow -3a+7b+19c=0$,

parallelo a r_2 : $al+bm+cn=0 \Rightarrow -2ka+kb+3c=0$,

ortogonale a σ: $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0 \Rightarrow a-b=0$.

Otteniamo un sistema omogeneo di tre equazioni nelle incognite a,b,c che devono risultare $(a,b,c)\neq(0,0,0)$.

Il sistema ammette soluzioni non banali se e solo se il determinante di

$$\begin{pmatrix} -3 & 7 & 19 \\ -2k & k & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

risulta uguale a 0. $k=-12/19$

Poiché per tale valore la matrice ha rango 2, ne segue che otterremo ∞^1 soluzioni: (a,a,- 4/19 a). I piani avranno quindi equazione con $a\neq 0$:

$$ax + by + cz + d = 0$$

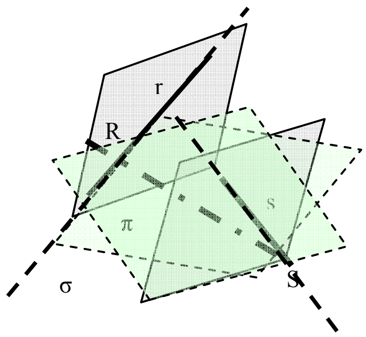
$$ax+ay-4/19\, az +d=0$$

$$x+y-4/19z +h=0, \quad h=d/a \quad \text{con } h\in\mathbb{R}$$

fascio improprio di piani.

Retta di minima distanza

Date due rette r, s sghembe esiste un'unica retta t **incidente e ortogonale** ad entrambe le rette; tale retta è detta retta di minima distanza perché individua i punti (R, S) di entrambe le rette che hanno mutua distanza minima.



Per trovare t si può procedere così:

1) determiniamo i parametri direttori di r e s;
2) indichiamo con [(l,m,n)] i parametri direttori di t e imponiamo la condizione di ortogonalità con r e s e determiniamo i parametri direttori di t;
3) nel fascio proprio di piani di asse r ricerchiamo il piano π contenente t (parallelo a t);
4) nel fascio proprio di piani di asse s ricerchiamo il piano σ contenente t (parallelo a t). $\boxed{t: \pi \cap \sigma}$

Esercizio 1 importante

Determinare in $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$ la retta di minima distanza tra r e s:

$$r:\begin{cases} y+5x-3=0 \\ z+3=0 \end{cases} \quad s:\begin{cases} x+1=0 \\ y-2=0 \end{cases}.$$

Svolgimento

1) Le rette r e s hanno parametri direttori $[(1,-5,0)]_r$ e $[(0,0,1)]_s$.

2) $[(l,m,n)]$ verifica la condizione di ortogonalità con r e s se e solo se:

$$\ell.1+(-5).m+0.n=0$$

$$\ell.0+m.0+n.1=0$$

da cui si ricava $[(5,1,0)]$

3) Nel fascio proprio di piani di asse r:

$\mathcal{F}(r)$: $\quad \lambda(y+5x-3)+\mu(z+3)=0 \quad (\lambda,\mu)\neq(0,0)\in\mathbb{R}^2$

Pongo la condizione di complanarità con t :

$\Rightarrow \lambda=0 \quad \pi : z+3=0$.

4) Analogamente nel fascio proprio di piani di asse s

$\mathcal{F}(s)$: $\lambda(x+1)+\mu(y-2)=0 \quad (\lambda,\mu)\neq(0,0)\in\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \mu = -5\lambda \quad \sigma : x - 5y+11=0.$

Dunque la retta di minima distanza è:

$$t : \begin{cases} x-5y+11=0 \\ z+3=0 \end{cases}$$

Esercizio 2

Determinare la retta di minima distanza tra le rette sghembe:

$$r : \begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x+z=0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x+2z=0 \\ y-3z=0 \end{cases}$$

svolgimento

1) Le rette r e s hanno parametri direttori $[(\ldots\ldots\ldots)]_r$ e $[(\ldots\ldots)]_s$.

2) $[(l,m,n)]$ verifica la condizione di ortogonalità con r e s se e solo se:

$$\ell.\ldots+(\ldots).m+(\ldots).n=0$$

$$\ell.(\ldots)+m\ldots+n\ldots.=0$$

da cui si ricava [(……….)]

3) Nel fascio proprio di piani di asse r:

$\mathcal{F}$(r): $\lambda(x+y-z-1)+\mu(x+z)=0 \quad (\lambda,\mu)\neq(0,0)\in\mathbb{R}^2$

Pongo la condizione di parallelismo con t :

…..

4) Analogamente nel fascio proprio di piani di asse s

$\mathcal{F}$(s): $\lambda(x+2z)+\mu(y-3z)=0 \quad (\lambda,\mu)\neq(0,0)\in\mathbb{R}^2$

……

Dunque la retta di minima distanza è:

$$t:\begin{cases} .... \\ ... \end{cases}$$

Distanza tra punti: $A=(x_A,y_A,z_A)$ e $B=(x_B,y_B,z_B)$

$$d(A,B)=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2}$$

Distanza punto-piano $P=(x_P,y_P,z_P)$ e π:ax+by+c+d=0

$$d(P,\pi)=d(P,H)=\frac{|ax_P+by_p+cz_p+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Esercizio 1 (distanza)

Data la retta di equazione $r:\begin{cases}2x+y-3=0\\ y-z+1=0\end{cases}$ e il piano di equazione α: 2x+z =0 si verifichi che sono paralleli e si determini la loro distanza.

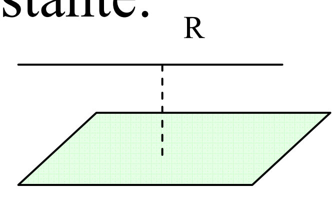
Svolgimento:

a) la retta e il piano sono paralleli:

il rango della matrice incompleta è 2 mentre il rango della completa è 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & +1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

b) la distanza di un qualsiasi punto della retta dal piano si mantiene costante:



Prendo per esempio il punto R=(0,3,4) appartiene alla retta e la sua distanza dal piano è:

$$d(R,\alpha)=\frac{|....|}{\sqrt{..^2+...^2}}=...\,.$$

Esercizio 2 (distanza)

Date le rette di equazione $r:\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$ e $s:\begin{cases} 2x+y=0 \\ x+1=0 \end{cases}$ si verifichi che sono sghembe e si determini la loro distanza (minima distanza tra due punti rispettivamente della retta r e s).

Svolgimento:

La matrice che rappresenta il sistema dell'intersezione ha rango 4

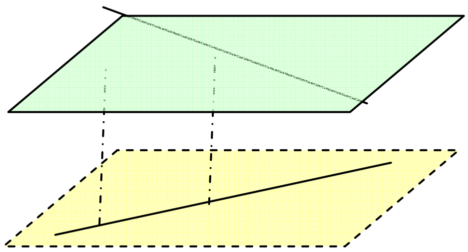
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esistono due piani paralleli che contengono le rette r ed s. Determino l'equazione del piano ρ contenente r parallelo a s. I parametri direttori della retta s sono [(0,0,1)] mentre il piano deve appartenere al fascio di piani di asse r: $\alpha(2x+y-3)+\beta(y-z+1)=0$ con $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$.

Imponendo la condizione di parallelismo di tale piano con s otteniamo: β=0 e il piano ρ: 2x+y-3=0.

Ora la minima distanza tra i punti della retta r ed s risulta uguale alla distanza tra la retta s e il piano ρ.

Utilizzando la formula della distanza punto piano si ottiene: $d(S,\rho)=.....$.



Esercizi da svolgere

1) Determinare la retta di minima distanza tra le coppie di rette sghembe:

$$r:\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x+3z=1 \end{cases} \qquad \text{s}:\begin{cases} 3x+3z=2 \\ x+2y+3z=0 \end{cases}$$

$$s:\begin{cases} z=-1 \\ 2x+3z=1 \end{cases} \qquad \text{r}:\begin{cases} 3x+3z=2 \\ z+2=0 \end{cases}$$

$$r:\begin{cases} x-y+1=0 \\ 2x+3z=1 \end{cases} \qquad \text{s}:\begin{cases} 3x+3z-1=0 \\ x-y+3=0 \end{cases}$$

2) Esami: es.3 del 04.02.2000; es.3 del 20.12.2002; es.4 del 07.12.2005; es.4 del 21.12.2005.

3) Si considerino le rette

$$r_1 : \begin{cases} x = 9 + 3t \\ y = 3 + kt \\ z = 4 + 4t \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 6 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

a) Per quale valore di k le rette r_1 ed r_2 sono incidenti?

b) Sia σ il piano di equazione $2x + y + z = 13$. Per quali valori di k esiste una retta contenuta in σ e ortogonale sia ad r_1 che ad r_2?

c) Per quali valori di k esiste un piano parallelo sia ad r_1 che ad r_2 e passante per i punti $P_1=(0,0,0)$ e $P_2= (2,2,2)$?

4) Si considerino i piani

$$\sigma_1 : x-ky+z=0, \quad \sigma_2 : y-2z+5=0, \quad \tau_1 : x-y-2z-1=0, \quad \tau_2 : 2x-z+1=0$$

a) Per quale valore di k esiste un piano appartenente al fascio generato da σ_1 e σ_2 ortogonale alla retta $\tau_1 \cap \tau_2$?

b) Per quale valore di k il fascio generato da τ_1 e τ_2 contiene un piano parallelo a σ_1?

c) Posto k=2, trovare un piano contenente $\sigma_1 \cap \sigma_2$ e parallelo alla retta $\tau_1 \cap \tau_2$.