Osservazione: due matrici sono identiche se e solo se hanno lo stesso numero di righe, lo stesso numero di colonne e hanno le stesse entrate in $\mathbb{K}$: date

$$A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \qquad B = (b_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,q}}$$

A=B se e solo se

1) m=p
2) n=q
3) $a_{i,j}=b_{i,j} \in \mathbb{K}$ per ogni i=1,…,m e j=1,…,n.

Studiamo ora alcune delle proprietà che regolano queste "operazioni".

Somma di matrici

Per ogni A, B, C $\in \mathbb{K}^{m,n}$ valgono le seguenti proprietà:

1) Proprietà associativa

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

Per la dimostrazione si rimanda a pag.3

2) Esistenza dell'elemento neutro

Esiste $O \in \mathbb{K}^{m,n}$ tale che $A+O = O+A = A$, dove O è la matrice con tutte le entrate nulle definita durante la lezione precedente.

Da dimostrare.

3) Esistenza dell'opposto

Esiste la matrice $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{m,n}$ tale che

$$\tilde{A} + A = O = A + \tilde{A}$$

Se la matrice A ha per entrate gli elementi $a_{i,j}$, allora la matrice $\tilde{A}$ ha in posizione (i,j) l'elemento $-a_{i,j}$.

Da dimostrare.

Una struttura algebrica (G,+) che soddisfa le tre proprietà precedentemente elencate si definisce gruppo:

quindi **($\mathbb{K}^{m,n}$, +) è un gruppo**.

4) Proprietà commutativa

A+B=B+A

Da dimostrare.

Ne segue che **($\mathbb{K}^{m,n}$,+) è un gruppo commutativo**.

Dimostriamo la proprietà associativa 1).

Siano A, B, C generiche matrici di $\mathbb{K}^{m,n}$ allora esistono $a_{i,j}$, $b_{i,j}$, $c_{i,j}$ opportune entrate in $\mathbb{K}$ tali che:

$$A=(a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \qquad B=(b_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \qquad C=(c_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

per esteso

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m,1} & \cdots & b_{m,n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & \cdots & a_{1,n}+b_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1}+b_{m,1} & \cdots & a_{m,n}+b_{m,n} \end{pmatrix}$$

$$(A+B)+C=\begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & \cdots & a_{1,n}+b_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1}+b_{m,1} & \cdots & a_{m,n}+b_{m,n} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m,1} & \cdots & c_{m,n} \end{pmatrix}=$$

per definizione di somma di matrici

$$=\begin{pmatrix} (a_{1,1}+b_{1,1})+c_{1,1} & \cdots & (a_{1,n}+b_{1,n})+c_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (a_{m,1}+b_{m,1})+c_{m,1} & \cdots & (a_{m,n}+b_{m,n})+c_{m,n} \end{pmatrix}=$$

per la proprietà associativa della somma in $\mathbb{K}$

$$=\begin{pmatrix} a_{1,1}+(b_{1,1}+c_{1,1}) & \cdots & a_{1,n}+(b_{1,n}+c_{1,n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1}+(b_{m,1}+c_{m,1}) & \cdots & a_{m,n}+(b_{m,n}+c_{m,n}) \end{pmatrix}=$$

per definizione di somma di matrici

$= A + (B + C)$

La dimostrazione poteva essere fatta con la notazione sintetica, giustificando come prima le uguaglianze:

$$(A+B)+C=((a_{i,j}+b_{i,j})+c_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}=\dots=$$

$$=(a_{i,j}+(b_{i,j}+c_{i,j}))_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}=A+(B+C).$$

Oppure:

1) (A+B)+C $\in\mathbb{K}^{m,n}$

2) A+ (B+C) $\in\mathbb{K}^{m,n}$

Dunque la matrice somma al primo membro ha lo stesso numero di righe/colonne della matrice somma al secondo membro.

3) Per definizione di somma di matrici:

$$\big((A+B)+C\big)_{i,j}=(a_{i,j}+b_{i,j})+c_{i,j}=\dots=$$

$$=a_{i,j}+(b_{i,j}+c_{i,j})=\big(A+(B+C)\big)_{i,j}$$

per ogni i=1,…,m e j=1,…,n.

Prodotto di uno scalare per una matrice

Per ogni A, B $\in\mathbb{K}^{m,n}$ e per ogni λ, μ $\in\mathbb{K}$ valgono le seguenti proprietà (da dimostrare):

1) **$(\lambda+\mu)\cdot A=\lambda\cdot A+\mu\cdot A$** (da dimostrare)**;**

2) **$\lambda\cdot(A+B)=\lambda\cdot A+\lambda\cdot B$** (da dimostrare)**;**

3) **$(\lambda\,\mu)\cdot A=\lambda\,(\mu\cdot A)$** (dimostrata di seguito)**;**

4) **$1\cdot A=A$** (da dimostrare)**.**

Per ogni $A\in\mathbb{K}^{m,n}$ e per ogni $\lambda,\ \mu\in\mathbb{K}$, per definizione di prodotto con uno scalare:

$$(\lambda\mu)\cdot A=(\lambda\mu)\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (\lambda\mu)a_{1,1} & \cdots & (\lambda\mu)a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\lambda\mu)a_{m,1} & \cdots & (\lambda\mu)a_{m,n} \end{pmatrix}=$$

per la proprietà associativa del prodotto in $\mathbb{K}$

$$=\begin{pmatrix} \lambda(\mu a_{1,1}) & \cdots & \lambda(\mu a_{1,n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda(\mu a_{m,1}) & \cdots & \lambda(\mu a_{m,n}) \end{pmatrix}=$$

per definizione di prodotto tra uno scalare e una matrice,

$$=\lambda\begin{pmatrix}\mu a_{1,1} & \cdots & \mu a_{1,n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \mu a_{m,1} & \cdots & \mu a_{m,n}\end{pmatrix}=\lambda\left[\mu\begin{pmatrix}a_{1,1} & \cdots & a_{1,n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n}\end{pmatrix}\right]=\lambda\cdot(\mu\cdot A)$$

La stessa dimostrazione con la notazione sintetica, motivando i passaggi:

$$(\lambda\mu)(a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}=((\lambda\mu)a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}=(\lambda(\mu a_{i,j}))_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}=\lambda(\mu a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$$

Oppure

1) **$(\lambda\ \mu)\cdot A$**$\in\mathbb{K}^{m,n}$

2) **$\lambda\ (\mu\cdot A)$** $\in\mathbb{K}^{m,n}$

Dunque la matrice prodotto al primo membro ha lo stesso numero di righe/colonne della matrice prodotto al secondo membro.

3)

$$\big((\lambda\mu)(A)\big)_{i,j}=(\lambda\mu)a_{i,j}=\lambda(\mu a_{i,j})=\big(\lambda(\mu A)\big)_{i,j}$$

per ogni i=1,…,m e j=1,…,n.

Prodotto tra matrici

1) Proprietà associativa

Siano $A\in\mathbb{K}^{m,n}$, $B\in\mathbb{K}^{n,p}$ e $C\in\mathbb{K}^{p,q}$

$$\mathbf{(AB)C=A(BC)} \quad \text{(da dimostrare)}$$

2) Proprietà distributive

Siano $A\in\mathbb{K}^{m,n}$, $B,C \in\mathbb{K}^{n,p}$

$$\mathbf{A(B+C)=AB+AC} \quad \text{(da dimostrare)}$$

Siano $A\in \mathbb{K}^{p,m}$, $B,C\in \mathbb{K}^{n,p}$

$$\mathbf{(B+C)A=BA+CA} \quad \text{(da dimostrare)}$$

3) Elemento neutro sinistro / destro

Siano $A\in\mathbb{K}^{p,m}$ e $I_p \in\mathbb{K}^{p,p}$: $\mathbf{I_pA=A}$ (da dimostrare)

Siano $A\in\mathbb{K}^{p,m}$ e $I_m \in\mathbb{K}^{m,m}$: $\mathbf{AI_m=A}$ (da dimostrare)

Ovviamente nel caso di **matrici quadrate di ordine n** il prodotto di matrici è sempre ben definito e risulta una legge di composizione interna; le tre proprietà qui elencate valgono banalmente ed esiste la matrice I_n elemento neutro del prodotto.

Attenzione: rispetto al prodotto non possibile garantire, per ogni matrice, l'esistenza **della matrice inversa**. Quindi in generale data una matrice $A \in \Lambda_{n,n}(\mathbb{K})$ non è detto che esista $\bar{A}$ tale che

$$A\,\bar{A} = I_n = \bar{A}A.$$

Ne segue che **$(M_n(\mathbb{K}),+)$ è un gruppo commutativo**, ma **$(M_n(\mathbb{K}), \cdot)$ non è un gruppo**.

Inoltre rispetto al prodotto tra matrici **non vale la legge dell'annullamento del prodotto**:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eppure nessuna delle due matrici fattori del prodotto è la matrice nulla.

La matrice trasposta

Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ una matrice di entrate $a_{i,j}$: si definisce **trasposta** di A, la si indica con ${}^{\mathbf{t}}\mathbf{A}$, A^t oppure A^I, una matrice di $\mathbb{K}^{n,m}$ di entrate $a_{j,i}$.

Per esteso

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & a_{i,j} & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in K^{m,n}$$

$${}^{t}\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \dots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & a_{j,i} & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathrm{K}^{n,m} .$$

Con notazione sintetica

$$A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \qquad {}^{t}A = (a_{j,i})_{\substack{j=1,\dots,n \\ i=1,\dots,m}}$$

Per costruire la matrice trasposta, trascrivo la i-esima riga di A nella i-esima colonna di **^{t}A** (scambio le righe con le colonne) o viceversa.

Esempi

1)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & \sqrt[3]{5} \end{pmatrix}$$

Poiché $A \in \mathbb{R}^{3,2}$ allora $^tA \in \mathbb{R}^{2,3}$:

$$^tA = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -3 & 1 & \sqrt[3]{5} \end{pmatrix}$$

2)

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & -4 & 5 \\ -2 & \sqrt{2} & -3 \end{pmatrix}$$

Poiché $B \in M_3(\mathbb{R})$ allora $^tB \in M_3(\mathbb{R})$:

$$
{}^{t}B = \begin{pmatrix} \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}
$$

Proprietà delle trasposte

Siano A, $B \in \mathbb{K}^{m,n}$ e sia $\lambda \in \mathbb{K}$, allora valgono le seguenti relazioni:

1) $\mathbf{{}^{t}({}^{t}A) = A}$ (da dimostrare)**;**
2) $\mathbf{{}^{t}(A+B) = {}^{t}A + {}^{t}B}$ (dimostrata di seguito)**;**
3) $\mathbf{{}^{t}(\lambda A) = \lambda\, {}^{t}A}$ (da dimostrare)**.**

Devo dimostrare che la matrice $\mathbf{{}^{t}(A+B)}$ è uguale alla matrice $\mathbf{{}^{t}A + {}^{t}B}$:

a) hanno lo stesso numero di righe,
b) lo stesso numero di colonne e
c) le stesse entrate.

Infatti:

$A, B \in \mathbb{K}^{m,n} \Rightarrow A + B \in \mathbb{K}^{m,n}$

$\Rightarrow \ {}^t(A+B) \in \mathbb{K}^{n,m}$.

D'altra parte $A, B \in \mathbb{K}^{m,n} \Rightarrow {}^tA , {}^tB \in \mathbb{K}^{n,m}$

$\Rightarrow {}^tA + {}^tB \in \mathbb{K}^{n,m}$ (dimostrato a) e b)).

Resta da dimostrare che abbiano le stesse entrate, cioè che per ogni i=1,…,n e j=1,…,m in posizione (i,j) nella matrice ${}^t(A+B)$ ci sia lo stesso elemento che si trova in posizione (i,j) nella matrice ${}^tA + {}^tB$.

L'entrata (i,j) della matrice ${}^t(A+B)$ è uguale all'entrata (j,i) della matrice A+B: $a_{j,i}+b_{j,i}$.

L'entrata (i,j) della matrice ${}^tA + {}^tB$ è la somma delle entrate (i,j) di ${}^tA$ e di ${}^tB$. D'altra parte l'elemento in posizione (i,j) di ${}^tA$ è $a_{j,i}$ e l'elemento in posizione (i,j) di ${}^tB$ è $b_{j,i}$: l'entrata (i,j) di ${}^tA + {}^tB$ è $a_{j,i}+b_{j,i}$. c.v.d.

Esercizi da svolgere:

1) Completare le dimostrazioni non svolte in aula.

2) Si eseguano, quando possibile, le seguenti operazioni con le matrici:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 0 & 4 & 2\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$A\,{}^tB$; ${}^tC\,D$; ${}^tC\,{}^tD$; ${}^tD\,{}^tC$.

3) Date le matrici

$$E=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 0 & 4 & 2\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}\quad \mathrm{L}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -1\\ 0 & 4 & 1\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

Si verifichi che:

a) ${}^t(EL)={}^tL\,{}^tE$;

b) ${}^t(EL)\neq{}^tE\,{}^tL$;

c) ${}^tL=L$.

Matrici quadrate particolari

Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice quadrata.

Gli elementi $(a_{1,1}, a_{2,2}, \dots a_{n,n})$ costituiscono la **diagonale principale** di A.

La matrice A è detta **triangolare superiore** se $a_{i,j}=0$ per ogni $i>j$ (tutti gli elementi al di sotto della diagonale principale sono nulli).

La matrice A è detta **triangolare inferiore** se $a_{i,j}=0$ per ogni $i<j$ (tutti gli elementi al di sopra della diagonale principale sono nulli).

La matrice A è detta **diagonale** se $a_{i,j}=0$ per ogni $i\neq j$ (tutti gli elementi al di fuori della diagonale principale sono nulli). La matrice diagonale è sia triangolare superiore che inferiore.

La matrice A è detta **simmetrica** se coincide con la trasposta: $A={}^tA$.

Esempi

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(R)$$

A è una matrice quadrata di ordine 4.

La diagonale principale di A è (-1,0,3,0).

A è una matrice triangolare superiore.

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in M_5(R)$$

B è una matrice quadrata di ordine 5.

La diagonale principale di B è (-2,1,1,0,-3).

B è una matrice triangolare inferiore.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(R)$$

C è una matrice quadrata di ordine 3.

La diagonale principale di C è (1,-2,0).

C è una matrice diagonale.

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(R)$$

D è una matrice quadrata di ordine 4.

La diagonale principale di D è (3,0,0,0).

D è una matrice simmetrica, infatti

$${}^tD = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Osservazioni:

1) Se A è una matrice triangolare superiore/inferiore, allora ${}^tA$ è una matrice triangolare inferiore/superiore;

2) Se A è una matrice diagonale, allora ${}^tA$ è anch'essa diagonale e $A={}^tA$, dunque è anche simmetrica.

Attenzione: le matrici simmetriche non sono necessariamente diagonali.