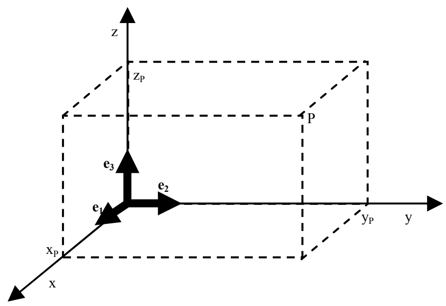
SPAZIO CARTESIANO $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$

Sia $[O,\mathcal{B}]$ un riferimento euclideo nello spazio euclideo $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$. $\mathcal{B}$ è una base **ortonormale.**



condizioni di ortogonalità

1) **retta-retta**: di parametri direttori $[(l_1,m_1,n_1)],[(l_2,m_2,n_2)]$

$$(l_1,m_1,n_1)\circ(l_2,m_2,n_2)=0$$

2) **piano –piano**: di equazioni $a_ix+b_iy+c_iz+d_i=0,\ i=1,2$

$$(a_1,b_1,c_1)\circ(a_2,b_2,c_2)=0$$

3) **retta-piano**: par. dir.$[(l,m,n)]$ e piano $ax+by+cz+d=0$

$$r\begin{pmatrix} a & b & c \\ l & m & n \end{pmatrix}=1$$

Esercizio 1

Dati i piani $\alpha_1: x+y+z-13=0,\quad \alpha_2: x-z+4=0$ e la retta r di equazione $r:\begin{cases} y-2x=0 \\ z+3x+1=0 \end{cases}$.

Studiare le mutue posizioni e l'ortogonalità.

Svolgimento

Troviamo i parametri direttori della retta r risolvendo il sistema lineare omogeneo associato:

$$\begin{cases} m-2l=0 \\ n+3l=0 \end{cases} \quad \begin{cases} m=2l \\ n=-3l \end{cases}$$

$$[(1,2,-3)]$$

a) I due piani sono incidenti perché il rango di

$$r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}=2$$

E sono ortogonali perché (a,b,c)=(1,1,1), (a′,b′,c′)=(1,0,-1) soddisfano la condizione di ortogonalità:

$$(a,b,c)\circ(a',b',c')=0$$

b) Il piano α_1 e la retta r sono non incidenti perché il rango di $r\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -13 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)=3$ mentre il rango della matrice incompleta è 2. La retta e il piano soddisfano la condizione di parallelismo:

$$(a,b,c) \circ (l,m,n)=0,$$

dunque paralleli distinti.

c) Il piano α_2 e la retta r sono incidenti perché il rango di $r\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3$ così come il rango della matrice incompleta è 3. Non sono ortogonali perché i coefficienti non soddisfano la condizione di ortogonalità:

$$r\begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ l & m & n \end{pmatrix} \neq 1.$$

Esercizio 2

Determinare le equazioni della retta passante per P=(1,0,-2) ortogonale al piano α_2: x-z+4=0.

Svolgimento

I parametri direttori della retta risultano proporzionali a (1,0,-1): la retta è in forma parametrica:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \quad , \qquad t \in R \\ z = -2 - t \end{cases}$$

Le equazioni cartesiane sono: ……….=…….=0.

Esercizio 3

Determinare l'equazione del piano passante per A=(-1,1,-2) ortogonale alla retta di equazione $r:\begin{cases} y-x=0 \\ z+x-1=0 \end{cases}$.

Svolgimento

I parametri direttori della retta risultano proporzionali a (1,1,-1):

il piano appartiene dunque al fascio improprio di piani di equazione: x+y-z+k=0.

Imponendo il passaggio di tale piano generico per il punto A si ottiene k=… e quindi il piano di equazione:…

Esercizio 4

Determinare l'equazione della retta r passante per P=(-1,0,2) parallela al piano di equazione α: x+y=0 e perpendicolare alla retta di equazioni

$$r:\begin{cases} \mathrm{x}+\mathrm{z}+1=0 \\ 2\mathrm{x}-\mathrm{y}+\mathrm{z}-4=0 \end{cases}.$$

Svolgimento

I parametri direttori della retta r sono ottenuti risolvendo:

$$r:\begin{cases} l+n=0 \\ 2l-m+n=0 \end{cases}$$ n=-ℓ e m=ℓ da cui [(1,1,-1)].

La retta richiesta ha parametri direttori ancora incogniti [(ℓ,m,n)] che devono soddisfare:

a) la condizione di parallelismo con il piano:

ℓ.1+m.1+n.0=0 (1);

b) la condizione di ortogonalità con r:

ℓ.1+m.1+n.(-1)=0 (2)

Le equazioni (1) e (2) devono valere contemporaneamente: (ℓ,-ℓ,0) $\Rightarrow$ [(1,-1,0)].

Le equazioni della retta richiesta sono quindi:

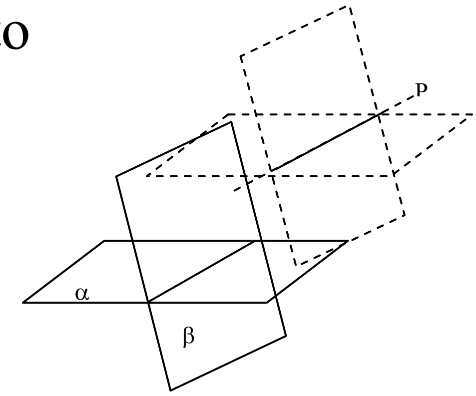
$$\begin{cases} x=-1+t \\ y=0-t \qquad t\in R \\ z=2 \end{cases}$$ oppure $$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots=\ldots \end{cases}.$$

Esercizi risolti con il metodo dei fasci di piani

Esercizio 5

Si determinino le equazioni della retta r passante per $P=(1,-2,0)$ parallela ai piani $\alpha: x+y+z-1=0, \beta: 2x-y+z=0$.

Svolgimento



La retta può essere ottenuta come intersezione tra due piani α' e β' paralleli ad α e β passanti per P.

Il fascio improprio di piani paralleli a α ha equazione $x+y+z+k=0$; il piano che passa per P è α': $x+y+z+1=0$. Analogamente si ottiene $\beta': 2x-y+z-4=0$

$$r: \begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases}$$

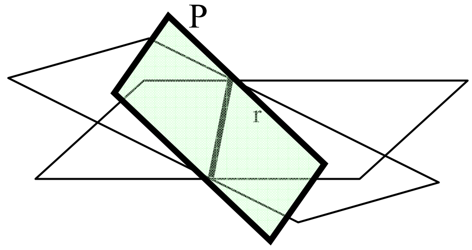
Esercizio 6

Si determini l'equazione del piano π passante per P=(1,1,-1) contenente la retta $r:\begin{cases} x-y+3=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$.

Svolgimento

Il piano, dovendo contenere la retta r, apparterrà al fascio proprio di piani di asse r:

$$\alpha(x-y+3)+\beta(2x-y)=0 \text{ con } (\alpha,\beta)\neq(0,0)$$



Imponendo il passaggio per P si ottiene: $3\alpha+\beta=0 \Rightarrow \beta=-3\alpha$. Sostituendo nel fascio e semplificando per α (lecito $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$) si ottiene π: ……………….=0.

Retta passante per due punti A e B

$$r\begin{pmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \end{pmatrix}=1$$

Retta passante per A nella direzione [(l,m,n)]

$$r\begin{pmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ l & m & n \end{pmatrix}=1$$

Esercizio 7

Sia [O,$\mathcal{B}$] un riferimento euclideo nello spazio euclideo $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$. Determinare le equazioni delle seguenti:

a) la retta r passante per i punti A=(1,-2,-3) e B=(0,3,-3);

b) la retta s passante per C=(-1,2,-1) e direzione [(0,0,1)];

c) dimostrare che le rette r, s così ottenute sono sghembe e determinare le equazioni dei piani paralleli che le contengono.

Svolgimento

a) la retta che passa per A e B ha equazioni:

$$\frac{x-1}{0-1}=\frac{y+2}{3+2} \quad \wedge \ z+3=0 \qquad \Leftrightarrow \quad r:\begin{cases} y+5x-3=0 \\ z+3=0 \end{cases}$$

b) analogamente la retta s passante per C è:

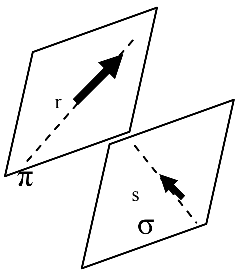
$$x+1=0 \ \wedge \ y-2=0 \qquad \Leftrightarrow \quad s:\begin{cases} x+1=0 \\ y-2=0 \end{cases}$$

c) le rette sono sghembe perché la matrice completa

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ha determinante **non** nullo.

Per determinare i piani paralleli che contengono rispettivamente r e s osservo preliminarmente che i parametri direttori sono $[(-1,5,0)]_r$ e $[(0,0,1)]_s$.



Il piano π richiesto, contenente la retta r, appartiene al fascio proprio di piani di asse r: $\alpha(5x+y-3)+\beta(z+3)=0$ con $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$. Riordinando i coefficienti rispetto a x,y,z: $5\alpha x+\alpha y+\beta z-3\alpha+3\beta=0$.

Questo piano è parallelo alla retta s se:

$5\alpha.0+\alpha.0+\beta.1=0 \quad \Rightarrow \quad \beta=0 \quad \Rightarrow \quad \pi: 5x+y-3=0$.

Analogamente per σ, contenente s, che appartiene al fascio proprio di piani di asse s: $\alpha(x+1)+\beta(y-2)=0$ ossia $\alpha x+\beta y+\alpha-2\beta=0$. Imponendo la condizione di parallelismo con la retta r si ottiene $\alpha.(-1)+\beta.5=0$ ossia $\alpha=5\beta$. Sostituendo nel fascio e semplificando per β si ottiene σ: …………….=0.

Esercizio 8

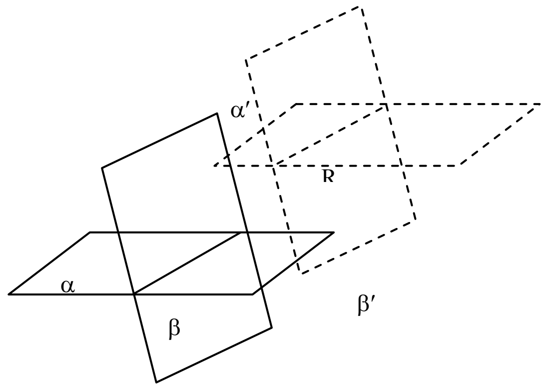
a) Determinare la retta r parallela ai piani α: $2x+4z=0$ β: $x+y+2z-1=0$ passante per $R=(0,4,0)$.

b) Determinare la retta p passante per $Q=(1,1,0)$ e $P=(0,-2,1)$

c) Dimostrare che le rette r, p sono incidenti e determinare l'equazione del piano che le contiene entrambe.

Svolgimento

a) trovo le equazioni dei piani



α'e β' paralleli ad α e β passanti per R.

Il fascio improprio di piani paralleli a α ha equazione 2x+4z+k=0; il piano che passa per R è proprio α: 2x+4z =0. Analogamente si ottiene β': x+y+2z-4=0

$$r:\begin{cases} \text{.........} = 0 \\ \text{.....................} = 0 \end{cases}$$

b) la retta passante per Q=(1,1,0) e P=(0,-2,1) ha equazione:

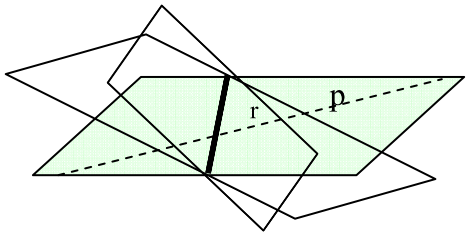
$$r\begin{pmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 0-1 & -2-1 & 1-0 \end{pmatrix} = 1$$

$$p:\begin{cases} \mathrm{x+z\text{-}1=0} \\ y+3z-1=0 \end{cases}.$$

c) le rette r, p sono incidenti perché rango di A e A| B è 3:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

Il piano che contiene entrambe le rette è un piano del fascio di piani di asse r parallelo ad p.



$\mathcal{F}$(r): $\lambda(2x+4z)+\mu(x+y+2z-4)=0 \quad (\lambda,\mu)\neq(0,0)\in\mathbb{R}^2$

Imponendo la condizione di parallelismo con la retta **p** di parametri direttori $[(1,3,-1)]_p$, si ottiene:

$(2\lambda+\mu).1+(\ \mu).3+(\ 4\lambda+2\mu).(-1)=0 \Rightarrow \lambda=\mu.$

Il piano richiesto è: ………………..=0.

Esercizi da svolgere:

1) Esercizio 1 dei temi d'esame 07.12.2005, 12.12.2002 e 20.12.2002. Esercizio 3 tema d'esame 05.07.2000.

2) Fissato un riferimento affine nello spazio affine si determinino (se esistono) le equazioni:

   a) la retta r passante per A=(1,0,1) con spazio direttore W={(a,a,a) |a∈R};

   b) il fascio di piani contenente r;

   c) il piano α contenente r parallelo al piano β: 2x-3y+z+4=0;

   d) il piano γ passante per B=(0,1,-1) e contenente r;

   e) il piano δ passante per C=(2,1,0) e parallelo a γ;

   f) il piano φ passante per B, C, D=(1,0,-1);

   g) studiare l'intersezione fra $\mathcal{F}_k$: kx+y-2z+3=0 ed il piano φ.

3) Date le seguenti coppie di rette stabilire le mutue posizioni:

$$r:\begin{cases} x+y+z+2=0 \\ x+z+3=0 \end{cases} \quad s:\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ y=6 \end{cases}$$

$$r:\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+3=0 \end{cases} \quad s:\begin{cases} x+6y-6z=4 \\ y-z+4=0 \end{cases}$$

$$r:\begin{cases} x+y+3z-1=0 \\ x-z+1=0 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} 2x+y+2z=0 \\ 4x+y+3=0 \end{cases}$$

4) Per quali valori di k reale le seguenti rette risultano sghembe? Per quali incidenti?

$$r:\begin{cases} (k+3)x+z+3=0 \\ ky+z-2=0 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} y+z-3=0 \\ 2y-z+4=0 \end{cases}$$

5) Verificare che le seguenti rette sono complanari

$$r:\begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=5+3\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\mathrm{R} \qquad\qquad \mathrm{s}:\begin{cases} \mathrm{x}=-1+\lambda \\ \mathrm{y}=-2+4\lambda \\ \mathrm{z}=-1+3\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\mathrm{R}$$