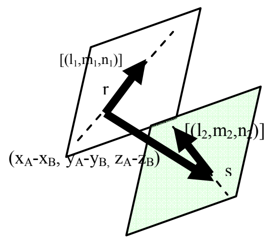
Rette in $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$

Se le rette sono scritte in **forma parametrica** allora

$$r:\begin{cases} x = x_A + \lambda l_1 \\ y = y_A + \lambda m_1, \quad \lambda \in \mathrm{R} \\ z = z_A + \lambda n_1 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x = x_B + \lambda l_2 \\ y = y_B + \lambda m_2, \quad \lambda \in \mathrm{R} \\ z = z_B + \lambda n_2 \end{cases}$$

risultano:

a) **sghembe** se



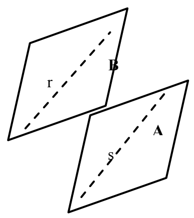
$$\det A = \det\begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_A - x_B & y_A - y_B & z_A - z_B \end{pmatrix} \neq 0$$

b) **complanari** se detA=0

b_1) incidenti se $[(l_1,m_1,n_1)] \neq [(l_2,m_2,n_2)]$;

b_2) parallele se $[(l_1,m_1,n_1)] = [(l_2,m_2,n_2)]$:

b_{21}) distinte se



$(x_A-x_B, y_A-y_B, z_A-z_B) \notin [(l_1,m_1,n_1)]$;

b_{22}) coincidenti se

$(x_A-x_B, y_A-y_B, z_A-z_B) \in [(l_1,m_1,n_1)]$.

Esercizio 1

Le rette di equazioni

$$p:\begin{cases} x = 1+2t \\ y = t \\ z = 1-2t \end{cases} \quad t \in R \qquad\qquad q:\begin{cases} x = -1-4t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases} \quad t \in R,$$

le rette sono parallele, incidenti o sghembe?

Svolgimento

[(2,1,-2)] sono i parametri direttori di p,

[(-4,1,0)] sono i parametri direttori di q.

I parametri direttori non sono mai proporzionali: le due rette non sono mai parallele.

Un punto di p è P=(1,0,1) mentre un punto di q è Q=(-1,0,-1): il vettore $\overrightarrow{PQ}$=(..,..,..)

$$\det\begin{pmatrix} .. & .. & .. \\ .. & .. & .. \\ .. & .. & .. \end{pmatrix}.....$$

Le rette sono …………...

Esercizio 2

Date le rette di equazioni

$$r: \begin{cases} x = 2t \\ y = kt \\ z = -1 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad\qquad s: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = k + t \\ z = -1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

studiare al variare del parametro reale k la mutua posizione.

Svolgimento

[(2,k,-2)] sono i parametri direttori di r,

[(-4,1,0)] sono i parametri direttori di s.

Le due rette ………………………… (i parametri direttori ………………….. proporzionali).

Le due rette sono ……………….. quando:

$$\det\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \ldots.$$

cioè per k…...

Riassumendo:

Parallele? …...

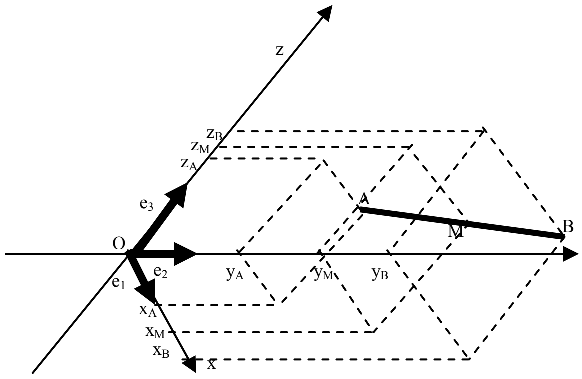
Incidenti? …..

Sghembe? …...

Punto medio

Dati $A=(x_A,y_A,z_A)$ e $B=(x_B,y_B,z_B)$, il punto medio del segmento AB è di coordinate:

$$M=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$$



Simmetria centrale: analoga a quella data nel piano affine.

Esercizio 3

Determinare le equazioni della retta t′ simmetrica di $t:\begin{cases} 3x-y=0 \\ z+y-3=0 \end{cases}$ rispetto a C=(1,0,-2).

Svolgimento

Un punto $T=(x_T, 3x_T, 3\text{-}3x_T)$ della retta t, con $x_T\in\mathbb{R}$, ha per simmetrico rispetto al punto C il punto $T'=(x,y,z)$ che soddisfa:

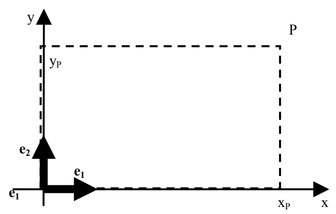
$$(x+x_T)/2=1,\ (y+3x_T)/2=0\ ,\ (z+3-3x_T)/2=-2$$

(equazioni parametriche della retta t′)

Ricavando dalla prima equazione $x_T=2-x$ e sostituendola nelle altre due si ottiene: $t':\begin{cases} y-3x+6=0 \\ z+3x+1=0 \end{cases}$.

PIANO CARTESIANO $\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$

Sia $[O,\mathcal{B}]$ un riferimento euclideo nel piano euclideo $\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$. $\mathcal{B}$ è una base ortonormale.



x

condizione di ortogonalità retta-retta:

di parametri direttori $[(l_1,m_1)],[(l_2,m_2)]$

$$(l_1,m_1)\circ(l_2,m_2)=0$$

oppure $\boxed{ax+by+c=0 \quad e \quad bx-ay+c'=0}$

distanza punto –punto $\mathbf{P=(x_p,y_p)}$ $\mathbf{Q=(x_Q,y_Q)}$

$$\overline{PQ}=\sqrt{(x_P-x_Q)^2+(y_P-y_Q)^2}$$

distanza punto –retta $\mathbf{P=(x_p,y_p)}$ **ax+by+c=0**

$$\frac{|ax_P+by_p+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Esercizio 1

Determinare in $\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$ l'equazione della retta passante per A=(1,-2) ortogonale a r: 2x-3y+1=0.

…

Esercizio 2

Determinare in $\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$ l'equazione delle rette bisettrici degli angoli formati dalle rette r: 3x+4y-2=0 e s: 4x+3y+1=0.

…

Esercizio 3

Determinare in $\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$ l'equazione della retta parallela a s: x+2y-5=0 e t: x+2y-2=0 che divide in due parti uguali la striscia di piano delimitata da s e t.

…

Definizione di circonferenza

Luogo geometrico dei punti del piano che hanno distanza costante (pari al raggio) da un punto fisso del piano detto centro.

Equazione della circonferenza

Prendendo punti P=(x;y) del piano, indicando il centro con $C=(x_C,y_C)$ e con r (≥ 0) la misura del raggio, si ottiene:

$$(x-x_C)^2+(y-y_C)^2=r^2$$

da cui la forma canonica

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{dove } C=(-a/2;-b/2) \quad \text{e} \quad r=\sqrt{x_C{}^2+y_C{}^2-c}$$

Posizione retta-circonferenza

Secante: due punti comuni reali distinti;

Tangente: due punti comuni reali coincidenti;

Esterna: nessun punto comune reale.

Esercizio 1

Determinare in $\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$, se possibile, l'equazione della circonferenza passante per i punti A=(1,-1), B=(0,2) e C=(-3,1).

Esercizio 2

Determinare in $\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$, se possibile, l'equazione della circonferenza passante per il punto A=(- 4,0), tangente alla retta r: y-x=0 nel punto O=(0,0).

Esercizio 3

Determinare in $\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$, se possibile, l'equazione della circonferenza avente il centro sulla retta c: 5x-2y=0 tangente alla retta r: x=0 e avente raggio di misura 2.

Esercizio 4

Determinare in $\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$, se possibile, l'equazione della circonferenza avente centro C=(1,2) che stacchi sulla retta s: y-x-2=0 una corda di misura $\sqrt{2}$.