In generale i piani possono essere tra loro

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

- $\boxed{\text{Piani distinti incidenti in una retta}}$ rappresentata dal sistema sopra scritto se $r\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2$.

- $\boxed{\text{Piani paralleli}}$ se $r\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 1$:

  distinti se $r\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \boxed{d_1} \\ a_2 & b_2 & c_2 & \boxed{d_2} \end{pmatrix} = 2$,

  coincidenti se $r\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \boxed{d_1} \\ a_2 & b_2 & c_2 & \boxed{d_2} \end{pmatrix} = 1$.

Esercizio 1 (tema d'esame)

Si dica per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare risulta compatibile:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + (k+1)y - z = 0 \\ x + ky + 3z = 1 \end{cases}$$

Interpretando x,y,z come coordinate si dica qual è la mutua posizione dei 3 piani rappresentati dalle equazioni del sistema al variare di k reale.

Svolgimento

Parte algebrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k+1 & -1 \\ 1 & k & 3 \end{pmatrix}$$

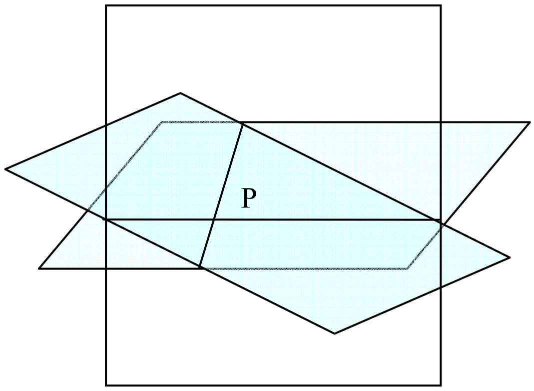
ha rango 3 con **k≠1/2**. In tal caso il sistema è di Cramer e ammette una sola soluzione.

Per **k=1/2** la matrice A ha rango 2 mentre la matrice completa ha rango 3

$$\mathrm{A}|\mathrm{B} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3/2 & -1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 3 & 1 \end{array}\right),$$

dunque il sistema non ammette soluzioni.

Parte geometrica: per **k≠1/2**, i 3 piani rappresentati dalle equazioni del sistema si intersecano in un solo punto, ovvero appartengono alla stella di piani che ha centro nel punto che ha coordinate date dalla soluzione del sistema.

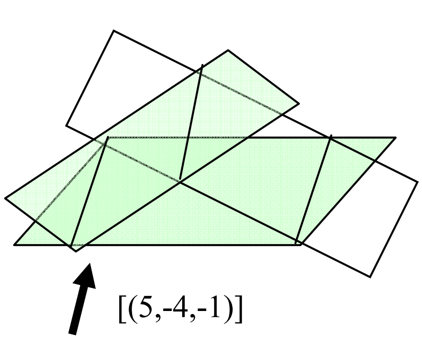


Per **k=1/2**, il sistema non ammette soluzione (punto comune ai tre piani) ma i tre piani si intersecano a due a due, perchè

$$r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3/2 & -1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 3 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3 \\ 1 & 3/2 & -1 \end{pmatrix} = 2,$$

lungo tre rette parallele di parametri direttori

[(5,-4,-1)]



.

Esercizio 2 (tema d'esame)

Si discuta al variare di h in $\mathbb{R}$ e ove possibile si risolva il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} y - hz = 1 - h \\ 2x + (h-3)y + 2z = h + 1 \\ x + hy - hz = 1 \end{cases}$$

interpretandone geometricamente i risultati ottenuti.

Svolgimento: parte algebrica

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -h & 1-h \\ 2 & h-3 & 2 & h+1 \\ 1 & h & -h & 1 \end{array}\right)$$

La matrice dei coefficienti ha rango 3 quando **h≠…∧ h≠…**. In questo caso il sistema è di Cramer e ammette una e una sola soluzione.

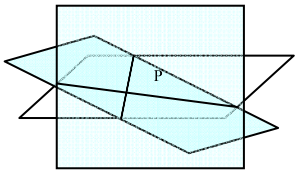
Per h=… il rango della matrice dei coefficienti e il della matrice completa è per entrambe 2. Il sistema ammette ∞^{3-2} soluzioni.

Per h=… il rango della matrice dei coefficienti e il della matrice completa è per entrambe 2. Il sistema ammette ∞^{3-2} soluzioni.

La ricerca algebrica delle soluzioni ….

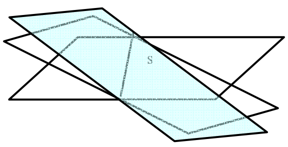
Parte geometrica:

h≠…∧ h≠… i piani si intersecano in un unico punto le cui coordinate sono date dalla soluzione del sistema.



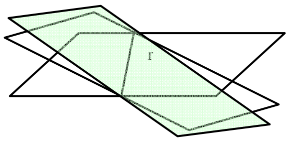
Per h=… i tre piani si intersecano lungo la retta s i cui punti hanno coordinate date dalle soluzioni del sistema

$$s:\begin{cases} y-z=0 \\ x+y-z=1 \end{cases}$$



Per h=… i tre piani si intersecano lungo la retta r

$$r:\begin{cases} y+2z=3 \\ 2x-5y+2z=-1 \end{cases}$$



Esercizio 3 (tema d'esame)

Si considerino i piani σ_1: ky+2z=5,

σ_2: (k+2)x+4y-4z=0

σ_3: $3y+(k-1)z=2$ con $k\in\mathbb{R}$.

a) Per quali valori di k esiste un piano α parallelo sia a σ_1 che a σ_2 che a σ_3?

b) Per quali valori di k intersecando σ_1 e σ_2 si ottiene una retta parallela a σ_3 ?

Svolgimento

a) Per la proprietà transitiva del parallelismo se esiste un piano così fatto, i tre piani tra di loro devono essere paralleli, dunque i coefficienti di x, y, z devono essere proporzionali ossia:

$$r\begin{pmatrix} 0 & k & 2 \\ \boxed{k+2} & 4 & -4 \\ 0 & 3 & k-1 \end{pmatrix} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{k = \ldots}$$

b) Intersecando σ_1 e σ_2 si deve ottenere una retta

$$r\begin{pmatrix} 0 & k & 2 \\ k+2 & 4 & -4 \end{pmatrix} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad k \neq \ldots$$

Inoltre tale retta deve essere parallela al piano a σ_3, cioè il rango di

$$r\begin{pmatrix} 0 & k & 2 \\ k+2 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & k-1 \end{pmatrix} = 2 \quad \Rightarrow \quad \det\begin{pmatrix} 0 & k & 2 \\ k+2 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & k-1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(\mathrm{k}+2)(\mathrm{k}^2 - k - 6) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\mathrm{k}+2)^2(k-3) = 0$$

Il valore ricercato (che soddisfa entrambe le condizioni) è $\boxed{\mathbf{k=\ldots}}$.

Si perviene allo stesso risultato determinando i parametri direttori di $\sigma_1 \cap \sigma_2$:

$$\rho\left(\det\begin{pmatrix} k & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ k+2 & -4 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} 0 & k \\ k+2 & 4 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \rho(-4k-8,\ \ 2(k+2),\ -k(k+2)) =$$

$$= \varphi(-4,\ 2,\ -k) \qquad\qquad \text{con } \ \mathrm{k} \neq -2 \text{ e } \ \varphi = \rho(\mathrm{k}+2)$$

Tale retta è parallela a σ_3 se i suoi parametri direttori soddisfano con i coefficienti del piano σ_3 la condizione di parallelismo retta-piano :

al + bm + cn =0

$- 4 \cdot 0 + 2 \cdot 3 - k \cdot (k-1) = 0$

cioè k=….

ESERCIZI SULLE RETTE

Si considerino le rette in **forma cartesiana**

$$r:\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases} \quad s:\begin{cases} a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0 \\ a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0 \end{cases}$$

e indichiamo con A |B la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{array}\right)$$

a)Le rette r, s sono **<u>sghembe</u>** se e solo se det(A |B)≠0

b) Le rette sono **<u>complanari</u>** se det(A |B)=0.

b_1) Se r(A)=3 r e s sono rette incidenti.

b_2) Se r(A)=2 r e s sono rette parallele

b_{11}) coincidenti se r(A |B)=2;

b_{12}) distinte se r(A |B)=3.

Esercizio 4

Date le rette r e s di equazione:

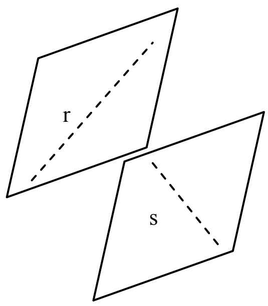
$$r:\begin{cases} x+2y+z=0 \\ z+3=0 \end{cases} \quad s:\begin{cases} 3x+6y+1=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Stabilire la mutua posizione.

Svolgimento

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il determinante di questa matrice è diverso da 0 dunque le rette non si intersecano e non giacciono neppure su un piano comune: **rette sghembe**. Le due rette giacciono su due piani tra loro paralleli x+……=0 e 3x+….=0, ma hanno direzioni differenti.



Esercizio 5

Date le rette r e s di equazioni:

$$r:\begin{cases}(k-2)x+z+2=0 \\ ky+z-1=0\end{cases} \qquad s:\begin{cases}3y+1=0 \\ y+z-3=0\end{cases}$$

a) determinare per quali valori del parametro k reale le rette sono parallele;

b) per quali valori di k reale sono sghembe.

Svolgimento

a) le rette risultano parallele quando il rango di

$$\begin{pmatrix} k-2 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

è 2. Uso il teorema degli orlati: $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ e impongo che i due minori di ordine 3 che lo orlano abbiano determinante uguale a 0 e ottengo $\boxed{\textbf{k=…}}$.

b) il determinante di

$$\begin{pmatrix} k-2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & k & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

deve risultare diverso da 0. $\boxed{\text{Per } \mathbf{k\neq\ldots \wedge k\neq\ldots}}$.