Fasci di rette

Si dice **fascio improprio** di rette generato dalla retta r: $ax+by+c=0$, di parametri direttori $[(b,-a)]$, l'insieme di tutte le rette parallele ad r. Tale insieme sarà quindi costituito da rette caratterizzate da equazioni del tipo:

$$ax+by+\mathbf{k}=0, \quad \mathbf{k}\in\mathbb{R}.$$

Si dice **fascio proprio** di rette di centro $C=(x_C,y_C)$ l'insieme di tutte le rette passanti per C. Sapendo che una retta di equazione $ax+by+c=0$ conterrà il punto C se e solo se $ax_C+by_C+c=0$, allora tale insieme sarà costituito, per esempio, da rette caratterizzate da equazioni del tipo:

$$\mathbf{a}x+\mathbf{b}y-(\,ax_C+by_C)=0, \quad \mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R} \text{ con } (a,b)\neq(0,0).$$

Teorema. Se r: $a_1x+b_1y+c_1=0$ e s: $a_2x+b_2y+c_2=0$ sono rette distinte incidenti nel punto C, allora il fascio proprio di centro C è rappresentato dalle equazioni:

$$\alpha(a_1x+b_1y+c_1)+\beta(a_2x+b_2y+c_2)=0 \quad \alpha,\beta\in R,(\alpha,\beta)\neq(0,0)$$

Le rette r e s sono dette generatrici del fascio.

Esercizio 1

a) Determinare un'equazione del fascio proprio di rette individuato da r: $2x+y=0$ ed s: $x+2y+3=0$ e determinare le coordinate del centro P del fascio.

b) Determinare tutte le equazioni delle rette con parametri direttori$[(-2,1)]$.

Svolgimento

a) $\alpha(2x+y)+\beta(x+2y+3)=0 \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ (\alpha,\beta)\neq(0,0).$

Il centro del fascio è il punto P di coordinate:

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ x+2y+3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-2x \\ x-4x+3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-2 \\ x=1 \end{cases}$$

$P=(1,-2)$.

Attenzione: scrivendo, per esempio,

$$\mathbf{k}(2x+y)+(x+2y+3)=0 \quad \mathbf{k}\in\mathbb{R}$$

si rappresentano tutte le rette passanti per P **<u>eccetto r .</u>**

b) Le rette appartengono tutte al fascio improprio di equazione:

$$x+2y+\mathbf{k}=0,\ \ \mathbf{k}\in\mathbb{R}.$$

Esercizio 2

Siano r: $y+1=0$ e s: $2x-y-3=0$ due rette. Si determinino:

a) il fascio di rette generato da r e da s;

b) la retta passante per $r\cap s$ e per $P=(1,-3)$;

c) il fascio improprio generato da r;

d) il fascio generato da due rette passanti per P.

Svolgimento

a) Il fascio generato dalle rette r e s ha equazione:

$$\mathcal{F}_1: \alpha(y+1)+\beta(2x-y-3)=0 \quad \alpha, \beta\in\mathbb{R}, (\alpha,\beta)\neq(0,0).$$

b) la retta appartiene a $\mathcal{F}_1$ e passa per P:

$\alpha(y_P+1)+\beta(2x_P-y_P-3)=0$ cioè $\alpha(-3+1)+\beta(2+3-3)=0$

$$\alpha=\ldots,$$

sostituendo nel fascio $\mathcal{F}_1$ si ottiene:

$$\ldots.=0 \text{ equivalente a } \ldots=0.$$

c) $\mathcal{F}_2$: $y+k=0 \quad k\in\mathbb{R}$.

d) $x-1=0$ e $y+3=0$ sono rette distinte passanti per P, dunque il fascio proprio di centro P ha equazione:

$$\mathcal{F}_3: \alpha(x-1)+\beta(y+3)=0 \quad \alpha, \beta\in R, (\alpha,\beta)\neq(0,0)$$

Oppure: **a**x+**b**y-(a.1+b(-3))=0, **a,b**$\in\mathbb{R}$…

Esercizio 3

Interpretare in $A_2(\mathbb{R})$ la discussione del sistema

$$\begin{cases} (k-2)y = 2-k \\ (k-3)x + ky = -2 \\ (k-3)x + 2y = k-4 \end{cases}.$$

La matrice completa del sistema:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & k-2 & 2-k \\ k-3 & k & -2 \\ k-3 & 2 & k-4 \end{array}\right)$$

non ha mai rango tre (determinante nullo sempre).

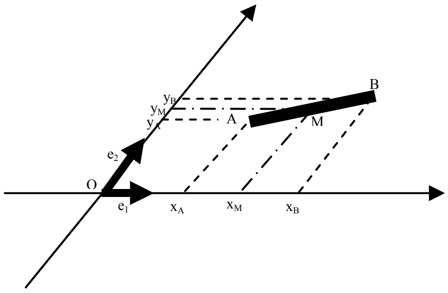
Per **k=2** : .

Per **k=3** : .

Per **k≠3**$\wedge$ **k≠2**: .

Punto medio

Dati $A=(x_A,y_A)$ e $B=(x_B,y_B)$, il punto medio del segmento AB è di coordinate (è il traslato di A rispetto al vettore ½ $\overrightarrow{AB}$): $M=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$

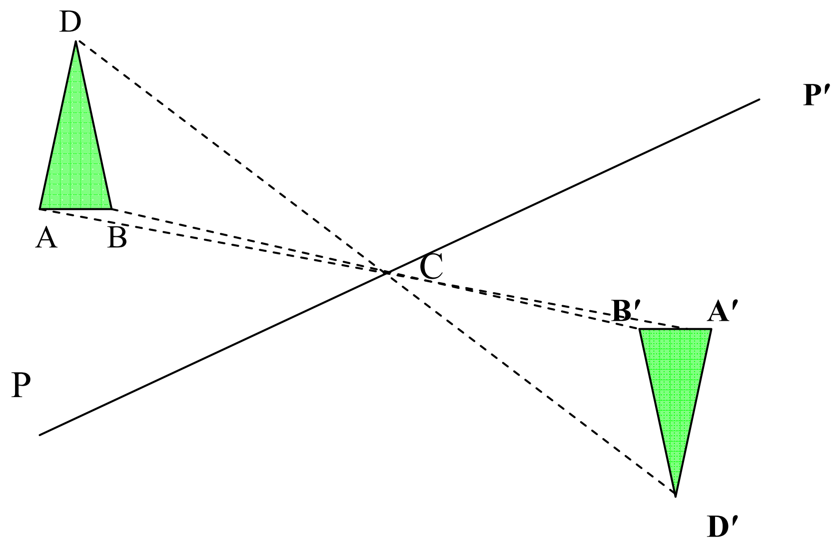


Esempio

Dati A=(4,-3) e B=(-1,0), il punto medio del segmento AB è di coordinate: $M=\left(\frac{4-1}{2},\frac{-3+0}{2}\right) \Rightarrow \boxed{M=\left(\frac{3}{2},\frac{-3}{2}\right)}$

Simmetria centrale (rispetto ad un punto)

Un punto P′ è simmetrico di un punto P rispetto a C (centro di simmetria) se e solo se C è il punto medio di P P′.



Esercizio 4

Determinare il punto simmetrico di A=(-2,3) rispetto a C=(1,1).

Il punto A′ cercato ha coordinate ($x_{A'}$, $y_{A'}$,) che soddisfano la formula:

$$C=\left(\frac{x_A+x_{A'}}{2},\frac{y_A+y_{A'}}{2}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{-2+x_{A'}}{2}=1\\ \dfrac{3+y_{A'}}{2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{A'}=4\\ y_{A'}=-1\end{cases}\quad \boxed{A'=(4,-1)}.$$

Esercizio 5

Determinare un'equazione della retta t′ simmetrica di t: x-y+3=0 rispetto a C=(-2,0).

Un punto P generico della retta t ha coordinate (x_P, x_P+3) con $x_P \in R$.

Il suo simmetrico P′ ha coordinate (x,y) che devono soddisfare le formule del punto medio:

$$C = \left(\frac{x + x_P}{2}, \frac{y + y_P}{2} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x + x_P}{2} = -2 \\ \dfrac{(x_P + 3) + y}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P = -4 - x \\ y = -(x_P + 3) \end{cases}$$

equazione parametrica della retta t′, sostituendo il parametro x_P si ottiene $\boxed{t': y=x+1}$.

Esercizi da svolgere:

1) Determinare natura, generatrici ed eventualmente il centro del fascio $\mathcal{F}$: $x(\alpha+2\beta)+y(\alpha-\beta)+\alpha=0$ $\quad \alpha, \beta \in R$, $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$

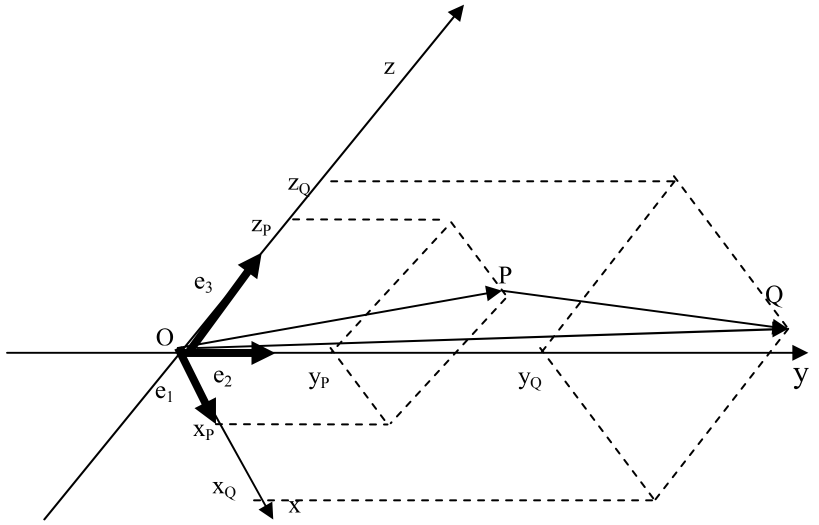
2) Determinare un'equazione della retta r′ simmetrica di r: $3x-2y+1=0$ rispetto a $C=(1,-1)$.

Spazio affine $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$

Dato uno spazio affine e un riferimento affine $[O,\mathcal{B}]$, il legame tra le coordinate e le componenti è

$$P = (x_P, y_P, z_P) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OP} = x_P \overrightarrow{e_1} + y_P \overrightarrow{e_2} + z_P \overrightarrow{e_3}$$

$$P=(x_P,y_P,z_P), Q=(x_Q,y_Q,z_Q)\overrightarrow{PQ}=(x_Q - x_P)\overrightarrow{e_1} + (y_Q - y_P)\overrightarrow{e_2} + (z_Q - z_P)\overrightarrow{e_3}$$



Durante le lezioni di teoria sono state dimostrate:

Equazioni della retta

Forma parametrica

$$\begin{cases} x = x_P + \lambda l \\ y = y_P + \lambda m, \qquad \lambda \in R \\ z = z_P + \lambda n \end{cases}$$

forma cartesiana

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}$$

con la condizione che:

$$r\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2$$

[(l,m,n)] è la classe dei parametri direttori della retta.

$$[(l,m,n)] = \left\{ \rho \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) \middle| \rho \in R \right\}$$

o si risolve il sistema lineare omogeneo associato:

$$\begin{cases} a_1 l + b_1 m + c_1 n = 0 \\ a_2 l + b_2 m + c_2 n = 0 \end{cases}$$

Equazioni del piano

Forma parametrica forma cartesiana

$$\begin{cases} x = x_P + \lambda l_1 + \mu l_2 \\ y = y_P + \lambda m_1 + \mu m_2, \\ z = z_P + \lambda n_1 + \mu n_2 \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in R \qquad ax + by + cz + d = 0$$

con la condizione che:

$$r\begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{pmatrix} = 2$$

Condizioni di parallelismo

1) retta-retta $[(l_1,m_1,n_1)] = [(l_2,m_2,n_2)]$

2) piano –piano $r\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 1$

3) retta-piano al+bm+cn=0

Esercizio 1

Sia $[O,\mathcal{B}]$ un riferimento affine nello spazio affine $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. Si determini (nel caso esistano) le equazioni dei seguenti:

a) la retta r passante per $P=(-1,-3,-1)$ e con spazio direttore $W=\{(\alpha,3\alpha,0) \mid \alpha\in\mathbb{R}\}$;

b) il piano passante per i punti P, $Q=(2,0,-1)$ e $R=(1,1,3)$;

c) il piano π passante per Q e contenente r;

d) il piano τ passante per R e parallelo a π;

e) il piano ω contenente la retta r e parallelo al piano δ: $-x+2y+3z-10=0$.

Svolgimento

a) la classe dei parametri direttori è dunque $[(1,3,0)]$ e la retta può essere scritta il forma parametrica mediante le equazioni:

$$\boxed{r:\begin{cases} x=-1+\lambda 1 \\ y=-3+\lambda 3 \\ z=-1+\lambda 0 \end{cases} \qquad \lambda \in R}$$

dalle quali si ottiene una rappresentazione cartesiana:

$$\begin{cases} 3(x+1)=y+3 \\ z+1=0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad r:\begin{cases} 3x-y=0 \\ z+1=0 \end{cases}.$$

Per ottenere direttamente la forma cartesiana si può ragionare sul vettore che congiunge P con un qualsiasi punto di tale retta (x,y,z): tale vettore ha componenti (x+1,y+3,z+1) e deve essere linearmente dipendente da (1,3,0). Allora:

$$r\begin{pmatrix} x+1 & y+3 & z+1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}=1$$

Usando il teorema degli orlati: $|3| \neq 0$ imponiamo che i due minori di ordine 2 che orlano 3 abbiano determinante nullo:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x+3-y-3=0$$

$$\begin{vmatrix} y+3 & z+1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3(z+1)=0$$

equazioni già trovate.

b) Con un ragionamento simile a quello fatto nel piano affine per determinare la retta passante per due punti si ottiene che il piano per tre punti ha eq.:

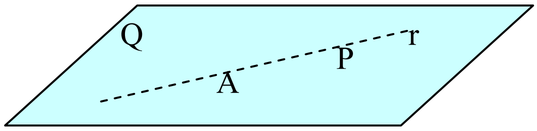
$$\boxed{\det\begin{pmatrix} x-x_P & y-y_P & z-z_P \\ x_Q-x_p & y_Q-y_P & z_Q-z_p \\ x_R-x_p & y_R-y_p & z_R-z_p \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x_P & y_P & z_p & 1 \\ x_Q & y_Q & z_Q & 1 \\ x_R & y_R & z_R & 1 \end{pmatrix} = 0}$$

Dunque:

$$\det\begin{pmatrix} x-x_P & y-y_P & z-z_P \\ x_Q-x_p & y_Q-y_P & z_Q-z_p \\ x_R-x_p & y_R-y_p & z_R-z_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & y+3 & z+1 \\ 2+1 & 0+3 & -1+1 \\ 1+1 & 1+3 & 3+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & y+3 & z+1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

da cui $\boxed{2x-2y+z-3=0}$.

c) Il piano π, dovendo contenere r, conterrà necessariamente due punti distinti di r di cui uno è P. Prendiamo come secondo punto, distinto da P, A= (0,0,-1). Utilizzando la formula precedente, il piano π passa per tre punti: A, P e Q. $\boxed{\pi\text{: } z+1=0.}$



d) Per determinare il piano parallelo a π consideriamo il fascio improprio di piani paralleli a π di equazione z+k=0 con $k\in\mathbb{R}$. Imponendo che il punto R appartenga al piano: $z_R+k=0$ cioè k=-3. Allora τ : $\boxed{z-3=0.}$

e) Il piano richiesto appartiene al fascio improprio di piani paralleli al piano δ: -x+2y+3z-10=0 di equazione: -x+2y+3z+k=0 con $k\in\mathbb{R}$. Tale piano conterrà necessariamente due punti distinti di r P=(-1,-3,-1) e A= (0,0,-1); imponendo il passaggio per P si ottiene: -(-1)+2(-3)+3(-1)+k=0, k=8.

Però l'equazione del piano corrispondente

-x+2y+3z+8=0 non è soddisfatta dalle coordinate di A. $\boxed{\text{Il piano } \omega \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$.

Esercizio 2

Determinare le equazioni delle rette passanti per A=(1,0,2):

a) parallela a r di equazione:

$$r:\begin{cases} x-3y=0 \\ z+3=0 \end{cases};$$

b) passante per B=(0,2,-1);

c) parallela alla retta per C=(2,1,3) e D=(-1,0,-1).

Svolgimento

a) i parametri direttori della retta r sono [(3,1,0)], dunque le equazioni parametriche si ottengono:

$$\begin{cases} \mathrm{x} = \mathrm{x}_{\mathrm{A}} + \lambda l \\ \mathrm{y} = \mathrm{y}_{\mathrm{A}} + \lambda m \\ \mathrm{z} = \mathrm{z}_{\mathrm{A}} + \lambda n \end{cases} \quad \lambda \in R \qquad \begin{cases} \mathrm{x} = 1 + \lambda 3 \\ \mathrm{y} = 0 + \lambda 1 \\ \mathrm{z} = 2 + \lambda 0 \end{cases}$$

Per avere le equazioni cartesiane si può esplicitare λ dalla seconda equazione ottenendo il sistema:

$$\begin{cases} x-3y=1 \\ z-2=0 \end{cases}$$

Oppure dalla condizione:

$$r\begin{pmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}=1 \qquad \dots$$

b) I parametri direttori sono proporzionali alle componenti del vettore AB: (-1,2,-3).

La retta ha equazioni:

$$\begin{cases} \mathrm{x}=\mathrm{x}_{\mathrm{A}}+\lambda l \\ \mathrm{y}=\mathrm{y}_{\mathrm{A}}+\lambda m \\ \mathrm{z}=\mathrm{z}_{\mathrm{A}}+\lambda n \end{cases} \quad \lambda \in R \qquad \begin{cases} \mathrm{x}=1-\lambda \\ \mathrm{y}=0+2\lambda \\ \mathrm{z}=2-3\lambda \end{cases}.$$

L'equazione cartesiana è ottenuta o isolando λ e eliminandolo in due equazioni oppure dalla condizione:

$$r\begin{pmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}=1$$

$$\begin{cases} 2x+y-2=0 \\ 3x-z-1=0 \end{cases}$$

c) I parametri direttori sono proporzionali alle componenti del vettore AB: (-3,-1,-4).

La retta ha equazioni

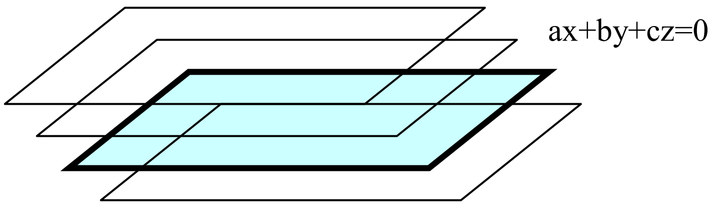
$$\begin{cases} \mathrm{x} = \mathrm{x}_\mathrm{A} + \lambda l \\ \mathrm{y} = \mathrm{y}_\mathrm{A} + \lambda m \qquad \lambda \in R \\ \mathrm{z} = \mathrm{z}_\mathrm{A} + \lambda n \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{x} = 1 - \lambda 3 \\ \mathrm{y} = 0 - \lambda 1 \\ \mathrm{z} = 2 - \lambda 4 \end{cases}.$$

L'equazione cartesiana è ottenuta o isolando λ e eliminandolo in due equazioni oppure dalla condizione:

$$r\begin{pmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix} = 1 \qquad \begin{cases} x - 3y - 1 = 0 \\ 4x - 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

Fascio improprio di piani

ax+by+cz+k=0, $k \in \mathbb{R}$

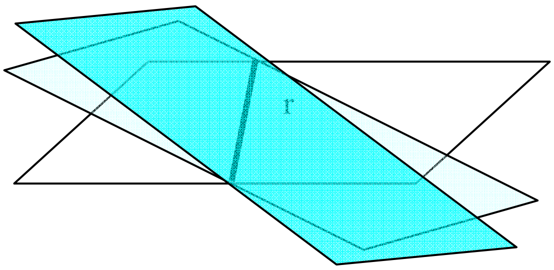


Fascio proprio di piani di asse r

$$r: \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad \text{rango}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2$$

Sono i piani di equazione: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad (\alpha, \beta) \neq (0,0)$

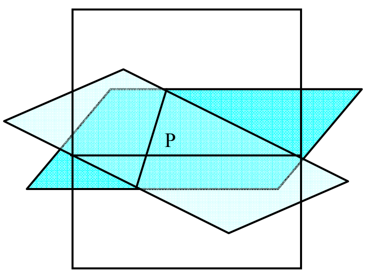
$$\alpha(a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1) + \beta(a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2) = 0$$



Stella propria di piani

di centro $P=(x_p,y_p,z_p) \in \pi_i$: $a_i x+b_i y+c_i z+d_i=0$ i=1,2,3

$$\alpha(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\beta(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)+\gamma(a_3x+b_3y+c_3z+d_3)=0$$



$(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$

Esercizio 3

Sia $\mathcal{F}_k$: kx+(k-1)y–(k-3)z+3=0 con k∈R, la rappresentazione di un fascio di piani,

a) se ne studi la natura;

b) si studi l'intersezione tra $\mathcal{F}_k$ e il piano di equazione z+1=0.

Svolgimento

a) le equazioni date rappresentano tutti i piani del fascio proprio di asse $r:\begin{cases} x+y-z=0 \\ y-3z-3=0 \end{cases}$ ad eccezione del piano di equazione x+y-z=0.

b) per studiare l'intersezione dovremo studiare il sistema:

$$\begin{cases} kx+(k-1)y-(k-3)z+3=0 \\ z+1=0 \end{cases} \quad k \in R.$$

Poiché la matrice incompleta del sistema ha sempre rango 2 (rango massimo)

$$\begin{pmatrix} k & k-1 & 3-k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le soluzioni di tale sistema saranno ∞^{3-2}. Geometricamente questo significa che i piani assegnati si intersecano per ogni k reale lungo una retta e le soluzioni del sistema (per k fissato) rappresentano ∞^1 punti di tale retta.